Bedingte Wahrscheinlichkeiten kann man wie folgt mithilfe von *Wahrscheinlichkeitsbäumen* visualisieren:

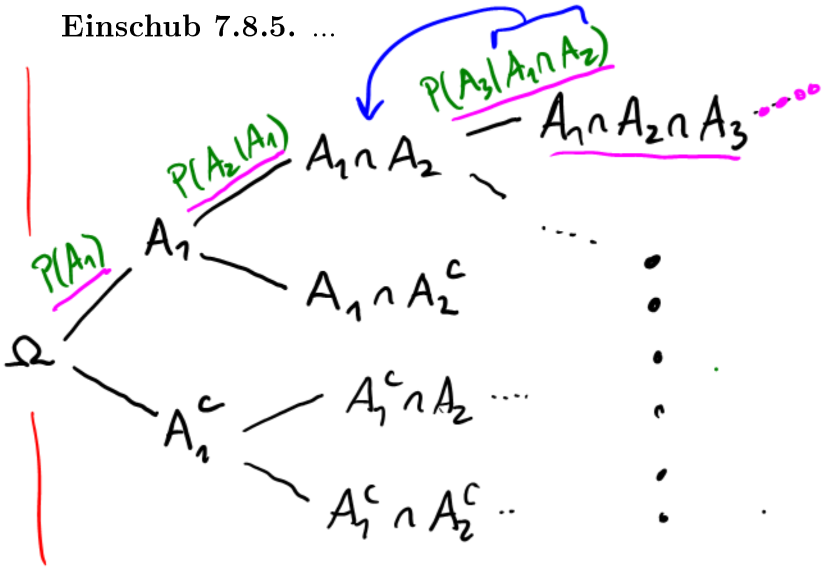
Einschub 7.8.3. ...

Für das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten gelten die folgenden Sätze:

Satz 7.8.4. *(Multiplikations- oder Pfadregel)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ *mit* $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$. *Dann gilt:*

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

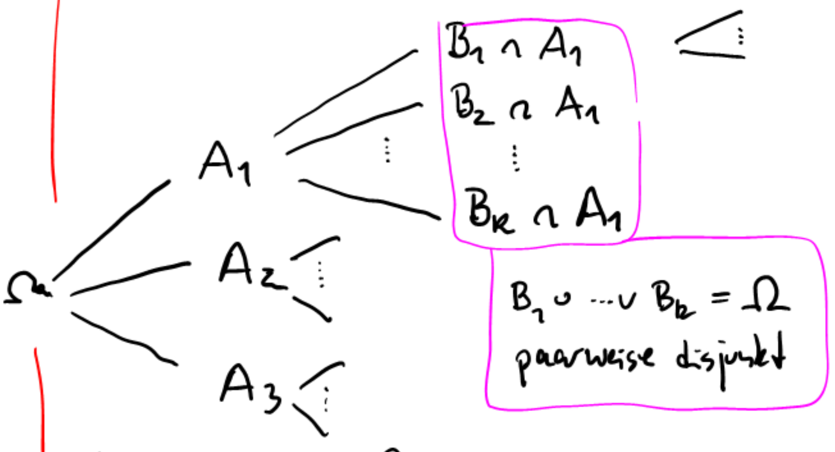
Einschub 7.8.5. ...



Beispiel von oben

$$P(\text{gerade } \underline{\text{und}} \text{ prim}) = P(\text{gerade} \mid \text{prim}) \cdot P(\text{prim}) = 1/3 \cdot 1/2$$

Einschub 7.8.6. ... "Mehrere Äste möglich"



$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ (paarweise disjunkt)

Beispiele 7.8.7. (Mehrstufiges Experiment und Pfadregel) Wir werfen zweimal hintereinander einen fairen 3-seitigen Würfel. Dazu sei

$$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \qquad |\Omega| = 9$$

die Ergebnismenge und $p(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{9}$ das zugehörige Laplace-Experiment. Das Ereignis $A \subset \Omega$ im ersten Wurf eine gerade Zahl zu werfen lautet

$$A = \{(2, s) \mid s \in \{1,2,3\}\} \subset \Omega. \qquad A^C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Das Ereignis $B \subset \Omega$ im zweiten Wurf eine gerade Zahl zu werfen lautet

$$B = \{(s, 2) \mid s \in \{1,2,3\}\} \subset \Omega.$$

Das Ereignis im zweiten Wurf eine gerade und im ersten eine ungerade Zahl zu werfen lautet

$$\{(1,2), (3,2)\} = B \cap A^C.$$

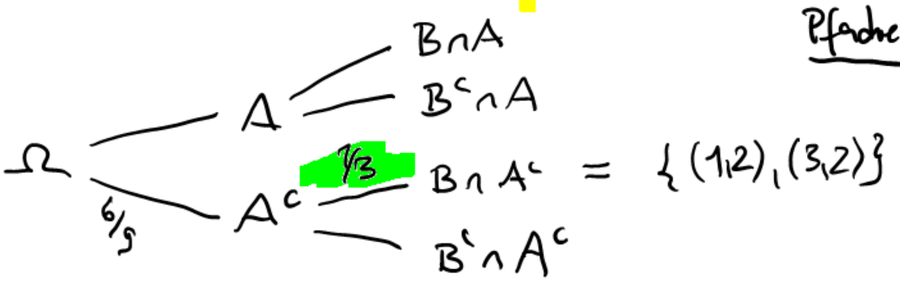
Also

$$\frac{2}{9} = P(B \cap A^C) \overset{\boxed{\text{Dfn}}}{=} P(B|A^C) \cdot P(A^C) = P(B|A^C) \cdot \frac{6}{9}$$

und somit

$$P(B|A^C) = \frac{1}{3}.$$

Der zugehörige Wahrscheinlichkeitbaum sieht so aus



Pfadregel $P(A^C \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{9}$

Umgekehrt kann man die Wahrscheinlichkeitsfunktion p bestimmen (eventuell kein Laplace-Experiment), falls man ausreichend viele bedingte Wahrscheinlichkeiten kennt (siehe Beispiel unten).

Satz 7.8.8. *(von der totalen Wahrscheinlichkeit)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W.raum, $A \in \mathcal{A}$ und $B_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, eine Partition von Ω, d.h. es gelten:

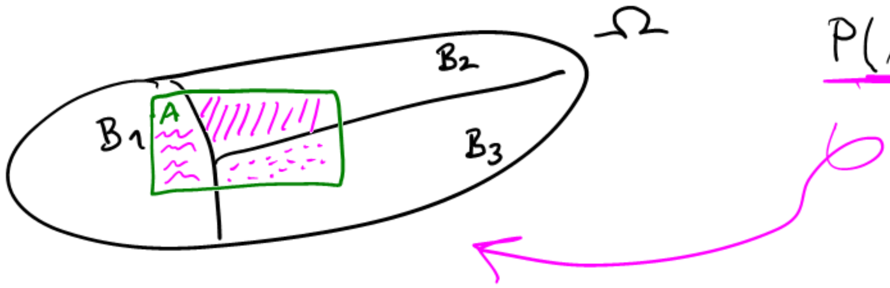
(i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *für alle* $i \neq j$,

(ii) $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \Omega$.

Ist weiterhin $P(B_i) > 0$ für alle $i \geq 1$, so gilt:

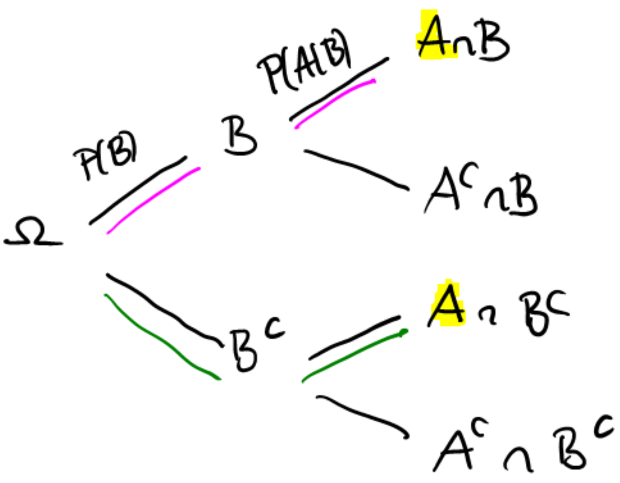
$$P(A) = \sum_{i \geq 1} \underbrace{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}_{= P(A \cap B_i)}.$$

Einschub 7.8.9. ...



Beispiele 7.8.10. Satz von der totalen W.keit und Pfadregel im Spezialfall $\Omega = B \cup B^C$.

so merken



SvtW:

$$P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^c)\cdot P(B^c)$$

„Summe der Pfade zu A"

Beispiele 7.8.11. In einer Urne befinden sich zwei blaue und zwei rote Kugeln. Es wird zweimal aus gezogen. Wird im ersten Zug eine rote Kugel gezogen, so wird sie wieder zurückgelegt. Dann wird ein zweites Mal gezogen. Wird im ersten Zug eine blaue Kugel gezogen, so wird sie nicht zurückgelegt und dann ein zweites Mal gezogen.

Aufgabe Bestimme Wkeit: im 2ten Zug rot; definieren Sie Ω und die Ereignisse formal

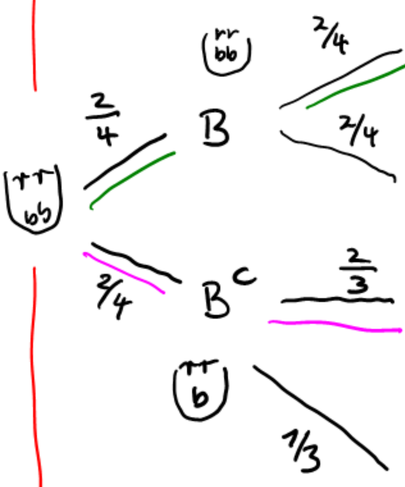
$\Omega = \{(r,r),(r,b),(b,r),(b,b)\}$

$B := \{\text{im 1Z rot}\} = \{(r,r),(r,b)\} \subset \Omega$

$A := \{\text{im 2Z rot}\} = \{(r,r),(b,r)\} \subset \Omega$

$B^c := \{\text{im 1Z blau}\} = \{(b,r),(b,b)\} \subset \Omega$

$A^c := \{\text{im 2Z blau}\} = \{(r,b),(b,b)\} \subset \Omega$



$A \cap B = \{(r,r)\}$

$A^c \cap B = \{(r,b)\}$

$A \cap B^c = \{(b,r)\}$

$A^c \cap B^c = \{(b,b)\}$

also $p : \Omega \to [0,1]$

$p(r,r) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

$p(r,b) = \frac{1}{4}$

$p(b,r) = \frac{4}{12}$

$p(b,b) = \frac{2}{12}$

$$P(A) = P(\text{„im 2ten Zug rot"}) \overset{tW}{=} \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{12}$$

Satz 7.8.12. *(von Bayes) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W.raum und $B_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$ eine Partition von Ω mit $P(B_i) > 0$ für alle $i \geq 1$. Dann gilt für alle $j = 1, 2, \ldots$. und alle $A \in \mathcal{A}$:*

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i\geq 1} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

Bemerkung 7.8.13. Speziell für die Partition (B, B^C) bedeutet der Satz von Bayes:

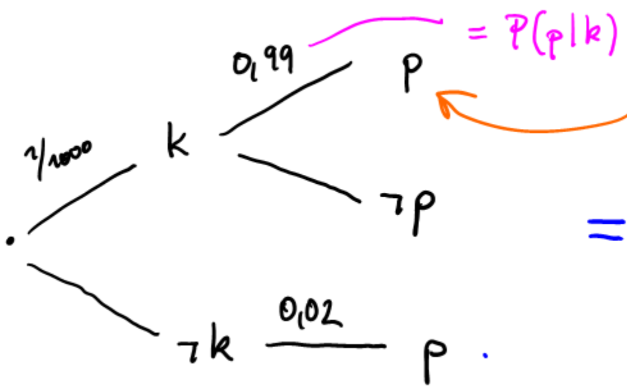
$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C)}$$

Einschub 7.8.14. ...

Ist $P(A|B)$, $P(A|B^c)$ bekannt, kann man $P(B|A)$ ausrechnen

Beispiele 7.8.15. In Deutschland sei eine Person von 1000 an einer bestimmten Krankheit erkrankt. Zur Diagnose der Krankheit wird ein Test verwendet, der in 99% der Fälle, in denen die Krankheit vorliegt, ein positives Testergebnis liefert. Bei einer nicht-erkrankten Person gibt der Test allerdings in 2% der Fälle fälschlicherweise ein positives Testergebnis aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, die ein positives Testergebnis erhalten hat, tatsächlich krank?

$$P(\underbrace{\text{krank}}_{=:B} \mid \underbrace{\text{positiv}}_{=:A}) \underset{\text{SvB}}{=} \frac{P(p|k) \cdot P(k)}{P(p|k) \cdot P(k) + P(p|\neg k) P(\neg k)}$$



Sensitivität

$$= \frac{0{,}99 \cdot \frac{1}{1000}}{0{,}99 \cdot \frac{1}{1000} + 0.02 \cdot \frac{999}{1000}} \approx 0{,}0472$$

$\neg P$

Spezifität des Tests

Also etwa 4,7%

Definition 7.8.16. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse A und B aus $\mathcal{A}$ heißen *((P-)stochastisch))-unabhängig*, falls gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Andernfalls heißen A und B *nicht unabhängig*. Allgemein heißt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$, I eine beliebige Indexmenge, *((P-)stochastisch))-unab-hängig*, falls für jede endliche Teilfamilie $(A_i)_{i \in J}$ mit $J = \{i_1, ..., i_n\} \subset I$ gilt:

$$P(\bigcap_{i \in J} A_i) = P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot ... \cdot P(A_{i_n}) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind gemäß der Definition also unabhängig (hier $I = \{1, 2, 3\}$), falls gilt:

Einschub 7.8.17. ...

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ und $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

für $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3\}$

Beispiele 7.8.18.

(i) im Beispiel 7.8.7 gelten

$$P(A) = \tfrac{3}{9}, \quad P(B) = \tfrac{3}{9}, \quad P(A \cap B) = P(\{(2,2)\}) = \tfrac{1}{9}.$$

Also sind A und B unabhängig.

(ii) Falls $P(B) > 0$ gilt, sind die Ereignisse A und B genau dann unabhängig, wenn $P(A|B) = P(A)$ gilt.

$$P(A|B) = P(A) \overset{\text{Dfn}}{\Leftrightarrow} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow \underbrace{P(A \cap B)}_{=} = P(A)P(B)$$

$$\overset{\text{unab}}{\Leftrightarrow} P(A)P(B) = P(A)P(B)$$

(iii) Falls A und B unabhängig sind, so auch A^C und B.

$$P(A^c \cap B) = P(B \setminus A) \overset{\text{Satz}}{=} P(B) - P(A \cap B) \overset{\text{unab}}{=} P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) \overset{\text{Satz}}{=} P(B)\,P(A^c)$$

(iv) Hat A die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1, so sind A und B für jede Wahl von B unabhängig.

$\underline{P(A) = 0}$ $\quad P(A \cap B) \overset{\text{Satz}}{\leq} P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 = \underbrace{P(A)}_{=0} P(B)$

$\underline{P(A) = 1}$ ... ohne Beweis.

(v) Aus der Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ folgt die paarweise Unabhängigkeit (d.h. je zwei der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ sind unabhängig), aber nicht umgekehrt. p.w. unab $\not\Rightarrow$ alle unabh.

(vi) (Un-)Abhängigkeit meint hier stets stochastische (Un-)Abhängigkeit und nicht zwingend eine kausale (un-)Abhängigkeit (d.h. (Nicht-)Existenz eines Ursache-Wirkungszusammenhang).

Beispiele 7.8.19. Ein zentrales Beispiel für Unabhängigkeit ist der n-fache unabhängige Wurf einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ auf 'Kopf' und Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf 'Zahl' fällt.

Wir betrachten den Spezialfall $n = 3$:

Einschub 7.8.20. ...

Die Anzahl der Pfade mit genau k Einsen kann man zählen, diesen Wert wollen wir vorerst $\alpha_{k,n}$ nennen. Daraus ergibt sich

$$P(\text{Es fallen genau } k \text{ Einsen}) = \alpha_{k,n} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k)$$

Durch $b_{n,p}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\Omega := \{0, 1, ..., n\}$ definiert, die sogenannte *Binomialverteilung zu den Parametern n und p.*