(v) Aus der Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ folgt die paarweise Unabhängigkeit (d.h. je zwei der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ sind unabhängig), aber nicht umgekehrt.

(vi) (Un-)Abhängigkeit meint hier stets stochastische (Un-)Abhängigkeit und nicht zwingend eine kausale (un-)Abhängigkeit (d.h. (Nicht-)Existenz eines Ursache-Wirkungszusammenhang).

Beispiele 7.8.19. Ein zentrales Beispiel für Unabhängigkeit ist der n-fache unabhängige Wurf einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ auf 'Kopf' und Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf 'Zahl' fällt.

Wir betrachten den Spezialfall $n = 3$:

Einschub 7.8.20. ...

Die Anzahl der Pfade mit genau k Einsen kann man zählen, diesen Wert wollen wir vorerst $\alpha_{k,n}$ nennen. Daraus ergibt sich

$$P(\text{Es fallen genau } k \text{ Einsen}) = \alpha_{k,n} \cdot p^k(1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k)$$

Durch $b_{n,p}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\Omega := \{0, 1, ..., n\}$ definiert, die sogenannte *Binomialverteilung zu den Parametern n und p.*

Einschub 7.8.21. ...

7.9 Kombinatorik

In der Kombinatorik unterscheidet man bei der Auswahl von k aus n verschiedenen Objekten, ob

- *mit Beachtung der Reihenfolge* oder
- *ohne Beachtung der Reihenfolge* ausgewählt wird.

Im ersten Fall erhält man eine *geordnete Menge*, die man als *k-Tupel* $(x_1, ..., x_k)$ notiert. Im zweiten Fall erhält man eine k-elementige Teilmenge $\{x_1, ..., x_k\}$.

7.9.1 Allgemeines Zählprinzip

Es seien $M_1, ..., M_k$ endliche Mengen. Wählt man aus diesen Mengen nacheinander jeweils ein Element aus, so gibt es insgesamt

$$|M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_k|$$

verschiedene Möglichkeiten, dies zu tun. Das Ergebnis dieser Auswahl wird mit

$$(x_1, ..., x_k) \in M_1 \times ... \times M_k$$

notiert und nennt man eine *Anordnung*, falls alle Mengen M_i gleich sind. Wir wissen bereits

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_k|.$$

Beispiele 7.9.1. zum Abzählprinzip.

Eine Anordnung von n verschiedenen Objekten heißt auch *Permutation*. Es gibt

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$$

verschiedene Permutationen von n Objekten.

Wir wollen die Formel an folgendem Beispiel einsehen.

Beispiele 7.9.2. Zehn verschiedene Bücher sollen angeordnet werden.

Eine k-elementige Teilmenge von einer n-elementigen Menge von Objekten wird auch *k-Kombination* genannt. Es gibt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

verschiedene k-Kombinationen von n Objekten.

Wir wollen die Formel an folgendem Beispiel einsehen.

Beispiele 7.9.3. Aus 10 verschiedenen Büchern sollen 3 mit einem Griff ausgewählt/gezogen werden. Wie viele Ergebnisse sind möglich?

Definition 7.9.4. Die natürliche Zahl $\binom{n}{k}$ (sprich: „n über k") heißt *Binomialkoeffizient*. Falls $k > n$ setzt man $\binom{n}{k} := 0$.

Satz 7.9.5. *(Binomischer Lehrsatz) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bemerkung 7.9.6.

(i) Für $n = 2$ erhält man die übliche Binomische Formel.

(ii) Für $x = y = 1$ ergibt sich $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ und

(iii) für $x = -1, y = 1$ ergibt sich: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Beispiele 7.9.7. (zur Binomialverteilung)
Wir betrachten ein Hotel mit 200 Zimmern. Die Wahrscheinlickeit, dass ein Zimmer vor Anreise storniert wird sei 10%.

(i) Es seien alle Zimmer reserviert. Es sei Z, das Ereignis, dass weniger als 186 Zimmer vor Anreise storniert werden. Dann gilt

(ii) Nun sollen mehr als 200 Reservierungen vorgenommen werden. Aber die Wahrscheilichkeit, dass das Hotel überbelegt ist soll maximal 1% betragen. Wie viele Reservierungen $n(\geq 200)$ dürfen maximal vorgenommen werden?

7.10 Urnenmodelle

Oftmals hilft beim strategischen Abzählen die Interpretation der Fragestellung als Ziehung aus einer Urne mit Kugeln. Hier sind im Wesentlichen vier Fälle zu unterscheiden:

Im Folgenden betrachten wir eine Urne mit n verschiedenen Kugeln. Es bezeichne k die Anzahl der Ziehungen von Kugeln aus der Urne.

i) Ziehen **mit** Zurücklegen und **mit** Beachtung der Reihenfolge:

   Anzahl der möglichen Ergebnisse: n^k

   Einschub 7.10.1. ...

ii) Ziehen **ohne** Zurücklegen und **mit** Beachtung der Reihenfolge:

   Anzahl der möglichen Ergebnisse: $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

   Spezialfall $k = n$:
   Das Experiment liefert alle möglichen Anordnungen von n Elementen.

Anzahl möglicher Anordnungen von n Elementen: $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Einschub 7.10.2. ...

iii) Ziehen **ohne** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge:

Anzahl der möglichen Ergebnisse: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$
(= Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge)

Einschub 7.10.3. ...

iv) Ziehen **mit** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge:
Anzahl der möglichen Ergebnisse: $\binom{n+k-1}{k}$

Einschub 7.10.4. ...

7.11 Hypergeometrische Verteilung

Sei

- N die Anzahl Kugeln in einer Urne, von denen

- M ($M \leq N$) eine bestimmte Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben. Aus dieser Urne zieht man
- n ($n \leq N$) Kugeln.

Dann gilt:

$$P(\text{Anzahl der gezogenen Kugeln mit Eigenschaft } \mathcal{E} = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Diese Verteilung heißt *hypergeometrische Verteilung zu den Parametern N, M und n.*

Beispiele 7.11.1. (Zahlenlotto) Berechnung der Wahrscheinlichkeit von k Richtigen im Lotto 6 aus 49, also $N = 49, M = 6$ und $n = 6$.