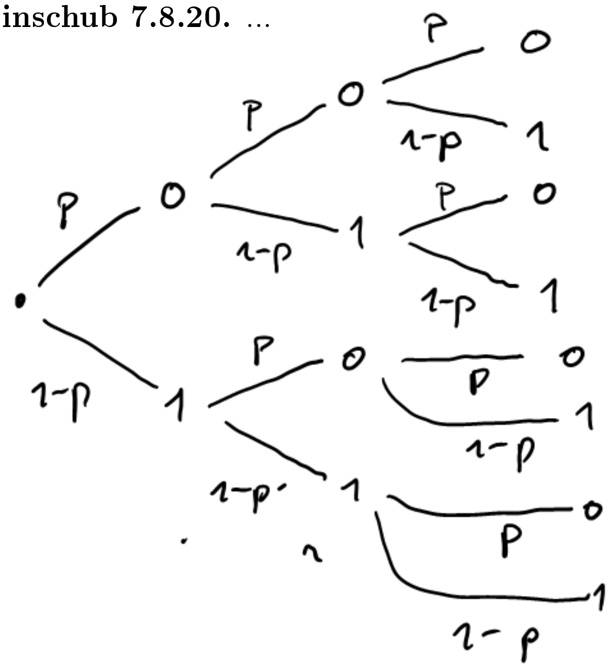
(v) Aus der Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ folgt die paarweise Unabhängigkeit (d.h. je zwei der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ sind unabhängig), aber nicht umgekehrt.

(vi) (Un-)Abhängigkeit meint hier stets stochastische (Un-)Abhängigkeit und nicht zwingend eine kausale (un-)Abhängigkeit (d.h. (Nicht-)Existenz eines Ursache-Wirkungszusammenhang).

Beispiele 7.8.19. Ein zentrales Beispiel für Unabhängigkeit ist der n-fache unabhängige Wurf einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ auf $\underbrace{\text{'Kopf'}}_{\hat{=}0}$ und Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf $\underbrace{\text{'Zahl'}}_{\hat{=}1}$ fällt.

Wir betrachten den Spezialfall $n = 3$:

Einschub 7.8.20. ...



$\Omega_3 := \{0,1\}^3 \ni (0,1,0)$

allg. $\Omega_n := \{0,1\}^n$

Pfadregel $P(\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\in \Omega_n}) = p^{\text{Anzahl 0en}} \cdot (1-p)^{\text{Anzahl 1en}}$

$C \subset \Omega_3$, $C := \{\text{"2 Einsen"}\} = \{(0,1,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$

$P(C) = p \cdot (1-p)^2 + p(1-p)^2 + p(1-p)^2 = \overset{\hat{=}\,\text{Anzahl Pfade}}{3} \cdot p(1-p)^2$

wobei $p =$ Wkeit für 1 fällt
$1-p =$ Wkeit für 0 fällt
wobei $\Omega_n := \{0,1\}^n$

hier andersherum (egal)

Die Anzahl der Pfade mit genau k Einsen kann man zählen, diesen Wert wollen wir vorerst $\alpha_{k,n}$ nennen. Daraus ergibt sich

$\alpha_{k,n} = \binom{n}{k}$ siehe Kapitel 7

$$P(\text{Es fallen genau } k \text{ Einsen}) = \alpha_{k,n} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k)$$

Durch $b_{n,p}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\Omega := \{0, 1, ..., n\}$ definiert, die sogenannte *Binomialverteilung zu den Parametern n und p.*

Einschub 7.8.21. ... Glücksrad

Wkeit bei 5 mal drehen 3 mal eine schwarz zu erhalten: $\alpha_{3,5} \cdot p^3 (1-p)^2$

7.9 Kombinatorik

In der Kombinatorik unterscheidet man bei der Auswahl von k aus n verschiedenen Objekten, ob

- *mit Beachtung der Reihenfolge* oder
- *ohne Beachtung der Reihenfolge* ausgewählt wird.

$(1,2) \neq (2,1)$

Im ersten Fall erhält man eine *geordnete Menge*, die man als k-*Tupel* $(x_1, ..., x_k)$ notiert. Im zweiten Fall erhält man eine k-elementige Teilmenge $\{x_1, ..., x_k\}$.

$\{1,2\} = \{2,1\}$

7.9.1 Allgemeines Zählprinzip

Es seien $M_1, ..., M_k$ endliche Mengen. Wählt man aus diesen Mengen nacheinander jeweils ein Element aus, so gibt es insgesamt

$$|M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_k|$$

Anzahl Elemente in M_k

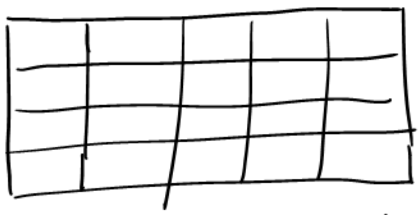
verschiedene Möglichkeiten, dies zu tun. Das Ergebnis dieser Auswahl wird mit

$$(x_1, ..., x_k) \in M_1 \times ... \times M_k$$

notiert und nennt man eine *Anordnung*, falls alle Mengen M_i gleich sind. Wir wissen bereits

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_k|.$$

Beispiele 7.9.1. zum Abzählprinzip. Schokolade



n Stückchen

m Riegel

$M_1 := \{1, -, n\}$

$M_2 := \{1, -, m\}$

$\Rightarrow$ Anzahl Stücke $= n \cdot m = |M_1| \cdot |M_2|$

$= |M_1 \times M_2|$

Eine Anordnung von n verschiedenen Objekten heißt auch *Permutation*. Es gibt

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$= 3! \cdot 4$

verschiedene Permutationen von n Objekten.

Wir wollen die Formel an folgendem Beispiel einsehen.

Beispiele 7.9.2. Zehn verschiedene Bücher sollen angeordnet werden.

M_1 = Menge 10 Bücher
M_2 = Menge 9 Bücher, nachdem eines aus M_1 genommen und ins Regal
M_3 = Menge 8 Büchern, ...

$\Rightarrow$ Anzahl der Anordnungen $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1$
$= 10!$

(aus Binomialverteilung oben)

Eine *k*-elementige Teilmenge von einer *n*-elementigen Menge von Objekten wird auch *k-Kombination* genannt. Es gibt

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

„n über k"

verschiedene *k*-Kombinationen von *n* Objekten.

Wir wollen die Formel an folgendem Beispiel einsehen.

Beispiele 7.9.3. Aus 10 verschiedenen Büchern sollen 3 mit einem Griff ausgewählt/gezogen werden. Wie viele Ergebnisse sind möglich?

a) Wähle erst aus 10 B eines B_1 für Platz 1 aus : 10
Wähle dann aus 9 B — " — B_2 — " — 2 — " — : 9
— " — 8 B — " — B_3 — " — 3 — " — : 8

$\Rightarrow$ $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten

b) (B_1, B_2, B_3), (B_2, B_1, B_3), ... liefert dasselbe Ergebnis (für die Aufgabe). Es gibt $3! = 6$ solche Anordnungen

c) <u>Fazit</u> es gibt $\frac{720}{6} = \frac{\overset{n}{10} \cdot \overset{n-1}{9} \cdot \overset{n-2}{8}}{\underset{k!}{3!}}$ Ergebnisse

<u>allgemein</u> $\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

d) zum Gleichheitszeichen: Kosten

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \overset{\text{Hm.}}{=} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)\cdot(1\cdot 2\cdot \ldots\cdot(n-k))} = \frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{k!}$$

Definition 7.9.4. Die natürliche Zahl $\binom{n}{k}$ (sprich: „n über k") heißt *Binomialkoeffizient*. Falls $k > n$ setzt man $\binom{n}{k} := 0$.

Satz 7.9.5. *(Binomischer Lehrsatz) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bemerkung 7.9.6.

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^0 y^{2-0} + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0$$

(i) Für $n = 2$ erhält man die übliche Binomische Formel.

(ii) Für $x = y = 1$ ergibt sich $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ und

(iii) für $x = -1, y = 1$ ergibt sich: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Anzahl Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n

Beispiele 7.9.7. (zur Binomialverteilung)
Wir betrachten ein Hotel mit 200 Zimmern. Die Wahrscheinlickeit, dass ein Zimmer vor Anreise storniert wird sei 10%.

(i) Es seien alle Zimmer reserviert. Es sei Z, das Ereignis, dass weniger als 186 Zimmer vor Anreise nicht storniert werden. Dann gilt

$$P(Z) = \sum_{i=0}^{185} \binom{200}{i} \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)}_{\text{Wkeit für Stornierung}}^{200-i} \cdot \left(\underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{nicht storniert}}\right)^{i}$$

(ii) Nun sollen mehr als 200 Reservierungen vorgenommen werden. Aber die Wahrscheilichkeit, dass das Hotel überbelegt ist soll maximal 1% betragen. Wie viele Reservierungen $n(\geq 200)$ dürfen maximal vorgenommen werden?

7.10 Urnenmodelle

Oftmals hilft beim strategischen Abzählen die Interpretation der Fragestellung als Ziehung aus einer Urne mit Kugeln. Hier sind im Wesentlichen vier Fälle zu unterscheiden:

Im Folgenden betrachten wir eine Urne mit n verschiedenen Kugeln. Es bezeichne k die Anzahl der Ziehungen von Kugeln aus der Urne.

i) Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge:

Anzahl der möglichen Ergebnisse: n^k

Einschub 7.10.1. ... Würfel 3 mal werfen: $n = 6, \; k = 3$

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

ii) Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge:

Anzahl der möglichen Ergebnisse: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Spezialfall $k = n$:
Das Experiment liefert alle möglichen Anordnungen von n Elementen.

Anzahl möglicher Anordnungen von n Elementen: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Einschub 7.10.2. ... 10 Bücher mit Platzierungen 1, 2, 3,

also $k = 3$, $n = 10$: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

"mit einem Griff" ziehen

iii) Ziehen **ohne** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge:

Anzahl der möglichen Ergebnisse: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

(= Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge)

gleichrangige

Einschub 7.10.3. ... Aus 10 Schüler:innen 3 Klassensprecher:innen

wählen : $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \, ((10-3)!)} = \frac{10!}{3! \, 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$

iv) Ziehen **mit** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge:

Anzahl der möglichen Ergebnisse: $\binom{n+k-1}{k}$

Einschub 7.10.4. ... Aus 3 Eissorten 2 Kugeln wählen,

$k = 2$, $n = 3$ ergibt $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2}$

7.11 Hypergeometrische Verteilung

Sei

- N die Anzahl Kugeln in einer Urne, von denen

- M $(M \leq N)$ eine bestimmte Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben. Aus dieser Urne zieht man
- n $(n \leq N)$ Kugeln.

Dann gilt:

$$P(\text{Anzahl der gezogenen Kugeln mit Eigenschaft } \mathcal{E} = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Diese Verteilung heißt *hypergeometrische Verteilung zu den Parametern* N, M *und* n.

Beispiele 7.11.1. (Zahlenlotto) Berechnung der Wahrscheinlichkeit von k Richtigen im Lotto 6 aus 49, also $N = 49, M = 6$ und $n = 6$.

Vorstellung: getippte Zahlen sind rote eingefärbte Kugeln (Eigenschaft $\mathcal{E}$)

$$P(k \text{ richtige}) = P(k \text{ rote}) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{49-6}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

es müssen k Kugeln aus den 6 mit Eigenschaft $\mathcal{E}$ gezogen werden

(Anzahl = 49 - 6)

von denen ohne Eigenschaft $\mathcal{E}$ müssen $6-k$ gezogen werden

es gibt insgesamt $\binom{49}{6}$ 6-elementige Teilmengen von 1, ..., 49 Kugeln (also $\binom{49}{6}$ Ergebnisse)