Anwendungen der Mathematik

Universität Bielefeld

WS 2025/2026

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

In der Vorlesung befassen wir uns mit

- Modellierung von funktionalen Zusammenhängen, Approximationsprozesse:
  Dies führt auf Fragen aus der *Analysis*.
- Modellierung zufälliger Phänomene:
  Dies führt auf Fragen aus der *Stochastik* (stochastikós: altgriechisch für scharfsinnig im Vermuten), der Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls.

1.1 Zahlen

Beispiele für Zahlenmengen:

- Natürliche Zahlen: 1, 2, 3, ...; Notation als Menge: $\mathbb{N}$
  Die natürlichen Zahlen sind durch die sogenannten *PEANO-Axiome* festgelegt.
- Ganze Zahlen: 0, 1, -1, 2, -2, ...; Notation als Menge: $\mathbb{Z}$
  Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen, so dass man Differenzen bilden kann.
- Rationale Zahlen, z.B. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{Q}$
  Die rationalen Zahlen erweitern die ganzen Zahlen, so dass man (außer durch 0) dividieren kann.
- Reelle Zahlen: rationale Zahlen und solche Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, e, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{R}$
  Die reellen Zahlen erweitern die rationalen Zahlen, so dass der „Zahlenstrahl keine Lücken mehr aufweist". Wenn man mit reellen Zahlen rechnet, so rechnet man symbolisch (d.h. mit dem Symbol $\sqrt{2}$) oder man approximiert die reelle Zahl durch rationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2} \approx 1,41$) und rechnet näherungsweise mit dieser Zahl. Man erhält solche Näherungen z.B. aus der Dezimalbruchdarstellung, die reelle Zahlen besitzen. (Mehr Details zu Eigenschaften reeller Zahlen finden sich im Kapitel 2).

Der Aufbau des Zahlensystems von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{Q}$ wird ausführlich in der Veranstaltung Arithmetik und Algebra behandelt. Ergänzende Hinweise zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ erfolgen hier in späteren Kapiteln.

Messwerte. Messwerte sind Maßzahlen mit Maßeinheiten, z.B. 4 kg, 2,7 m usw.. Maßzahlen sind meist reelle Zahlen. Die Maßeinheit gibt die Dimension (oder den Größenwert)an. Konvention: Beim Rechnen rechnen wir nur mit den Maßzahlen und führen die Einheit am Ende in Klammern, z.B. $2 + 3 = 5$ [kg].

Variablen. Variablen sind Platzhalter für Zahlen oder andere Objekte, die man für die Variablen einsetzen kann. Typischerweise notiert man Variablen mit kleinen oder großen Buchstaben, z.B. x, y, z, A, B, C,... . Man unterscheidet *unabhängige* Variablen, in die man (ohne Einschränkungen) einfach einsetzen kann, und *abhängige* Variablen, deren Wert von einer anderen Variablen abhängt, z.B. ist y gegeben durch $y = x^2 + 1$ eine abhängige Variable. Mithilfe von abhängigen Variablen lassen sich „Zuordnungen" beschreiben: $x \mapsto y = x^2 + 1$.
Treten viele Variablen auf, so notieren wir sie mit Indizes, z.B. $x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3 ....$

Zahlenpaare, Koordinatensystem. Während $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl veranschaulicht wird, werden Zahlenpaare (x,y) mit $x,y \in \mathbb{R}$ in der Koordinatenebene dargestellt, z.B. im *kartesischen Koordinatensystem*, in dem die beiden Koordinatenachsen (Zahlenstrahle für den ersten und den zweiten Wert) senkrecht zueinander stehen oder in einem *affinen Koordinatensystem*, in dem die Achsen in einem Winkel zwischen 0 und 90 Grad zueinander stehen. Die Achsen werden - je nach Zusammenhang - unterschiedlich bezeichnet. Die horizontale Achse heißt häufig x- oder *t-Achse* oder *Abszisse*, die vertikale Achse entsprechend *y-Achse* oder *Ordinate*. Die Einheiten auf den Achsen dürfen unterschiedlich sein.
Als Menge notieren wir Paare reeller Zahlen als sog. *kartesisches Produkt*: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ werden - je nach Zusammenhang - notiert als Punkte $P(2;4), P(2|4)$ oder als 2-Tupel $\binom{2}{4}, (2,4)$. Entsprechend definiert man *Zahlentripel* und *n-Tupel* durch $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ oder allgemeiner $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} := \{(x_1,...,x_n) \mid x_1,...,x_n \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Aussagenlogik

1.2.1 Aussagen

Genau zu definieren, was eine mathematische Aussage ist, ist überraschend schwierig. Wir wollen möglichst praktisch bleiben und verwenden folgende

Definition 1.2.1. Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Diese Definition ist für unsere Zwecke ausreichend. Hier sind einige

Beispiele 1.2.2.

1 „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“

2 „Alle Katzen sind grau.“

3 „$0 = 1$ “

Nicht jeder Satz ist eine Aussage, hier einige

Beispiele 1.2.3.

1 „Öffne das Fenster!“

2 „Diese Aussage ist falsch.“

3 „n ist eine ungerade Zahl. “

Einschub 1.2.4. ...

Definition 1.2.5. Die *Negation* einer Aussage A ist diejenige Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist - und umgekehrt.

Die Negation einer Aussage A bezeichnet man mit $\text{Nicht}(A)$ oder formaler mit $\neg A$.

Beispiele 1.2.6.

1 $\neg$(„Alle Katzen sind grau“) bedeutet „Es gibt eine Katze, die nicht grau ist.“

2 $\neg$(„$0 = 1$“) bedeutet „$0 \neq 1$“

1.2.2 UND, ODER

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist abhängig von der Verknüpfung. Wir betrachten ein Gnu sowie die Aussagen

$$\begin{aligned} F &= \text{Das Gnu ist ein Fisch,} \\ S &= \text{Das Gnu ist kein Säugetier,} \\ W &= \text{Das Gnu lebt ausschließlich im Wasser.} \\ V &= \text{Das Gnu ist ein Vogel.} \end{aligned}$$

Die Aussage „F und ¬ V“ ist falsch. Die Aussage „W oder ¬ S“ ist wahr.
Die Wahrheitswerte von mit und/oder verknüpften Aussagen werden durch Wahrheitstabellen festgelegt.

Einschub 1.2.7. ...

Die Negationen von „und “ und „oder “ sind durch elegante Symmetrie miteinander verbunden.

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \wedge \neg B \end{aligned}$$

Einschub 1.2.8. ...

1.2.3 Implikation

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist Aussage B wahr.“

Man sagt dann „A impliziert B “oder „Aus A folgt B“. Man notiert $A \Rightarrow B$.
Derartige Wenn/Dann Verknüpfungen können allerdings selbst wahr oder falsch sein. Außerdem gilt: aus dem Wahrheitswert der Implikation lassen sich keine Rückschlüsse auf den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ziehen.

Beispiele 1.2.9.

1 „Wenn ich Winston Churchill bin, dann bin ich Engländer. “

2 „Wenn ich Engländer bin, dann bin ich Winston Churchill. “

3 Wenn x gerade ist, dann ist x^2 gerade.

4 Die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade.

Einschub 1.2.10. ...

Bevor wir die Wahrheitstabelle der Implikation definieren betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiele 1.2.11. Die Aussage $1 = -1$ ist für die ganzen Zahlen $1, -1 \in \mathbb{Z}$ falsch. Allerdings können wir beide Seiten der Gleichung quadrieren und erhalten die wahre Aussage $1 = 1$. Daher ist die Implikation

$$1 = -1 \;\Rightarrow\; 1 = 1$$

wahr. Hier ein weiteres Beispiel:

Einschub 1.2.12. ...

Es folgt nun die Wahrheitstabelle für die Implikation.

Einschub 1.2.13. ...

Definition 1.2.14. Zwei Aussagen A und B heißen *äquivalent*, wenn sowohl $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind. Man schreibt dann $A \Leftrightarrow B$.

Beispiele 1.2.15.

1 „$x > 5 \;\Leftrightarrow\; -x < -5$“ ist wahr.

2 „Die Straße ist nass. $\Leftrightarrow$ Es regnet.“ ist falsch

3 $x^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 3$ ist falsch.

Einschub 1.2.16. ...

1.3 Mengen

Viele mathematische Sachverhalte werden ‚mengentheoretisch’ formuliert. In diesem Sinne ist die Mengenlehre so etwas wie die Sprache der Mathematik.

Naives Verständnis von Mengen:
Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Wohlbestimmt bedeutet, dass eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt x zu einer Menge M gehört, wir schreiben dann

$$x \in M,$$

oder nicht, wir schreiben dann

$$x \notin M.$$

Wohlunterschieden bedeutet, dass kein Element mehrfach zu einer Menge gehört.

Eine Menge A heißt *(echte) Teilmenge* von M falls jedes Element von A auch ein Element in M ist (bzw. und zusätzlich $A \neq M$ ist). Man notiert $A \subset M$. Man kann Mengen *explizit*, indem man eine Liste aller Elemente angibt, oder *implizit* beschreiben, indem man die Menge als die Teilmenge einer anderen Menge angibt, in der alle Elemente mit einer gewissen Eigenschaft zusammengefasst sind.

Beispiel 1.3.1.

a) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ist implizit beschrieben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}$$

und explizit durch $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$.

b) *Intervalle* sind Teilmengen der reellen Zahlen

- *abgeschlossenes* Intervall von a bis b:
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
- *halboffene* Intervalle von a bis b:
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
- *offenes* Intervall von a bis b:
$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Die Zahlen a und b heißen *Eckpunkte* des Intervalls. a oder b können auch gleich $\pm\infty$ sein.

c) Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist die Menge ohne Elemente und kann z.B. wie folgt angegeben werden: $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x > 1\}$

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten: $A = B$ genau dann, wenn $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ also genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Dies kann man zum Beispiel durch vollständige Fallunterscheidung beweisen.

Mengentheoretische Operationen (Teil 1)
Seien A, B Teilmengen von M.

Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B:
$$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Vereinigung(smenge) von A und B:
$$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(Mengen-)Differenz von A und B (auch *Komplement von B in A*):
$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ist $A = M$, so heißt $B^C := M \setminus B$ *Komplement von B*.

Einschub 1.3.2. ...

Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge von M*.

Einschub 1.3.3. ...

(Kartesisches) Produkt von A und B:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das ist ist also die Menge aller geordneten Paare bestehend aus Elementen von A (erster Eintrag) und Elementen von B (zweiter Eintrag).

Einschub 1.3.4. ...

Außerdem gibt es **Rechengesetze für Mengen:**

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Einschub 1.3.5. ...

1.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition 1.4.1 (Relation)**.** Seien A und B Mengen. Eine *Relation zwischen A und B* ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Ist ein Paar (a,b) Element von R, so sagt man dann, dass a in Relation R zu b steht. Wir schreiben in diesem Fall: aRb.

Einschub 1.4.2. ...

Beispiel 1.4.3.

- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{R}$, Gleichheitsrelation, Teilbarkeitsrelation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Geraden, Kreise, Parabeln in $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 2)

Einschub 1.4.4. ...

Definition 1.4.5 (Umkehrrelation)**.** Ist $R \subseteq A \times B$ eine Relation von A nach B, so ist durch

$$R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \mid aRb\}$$

eine Relation von B nach A, die sogenannte *Umkehrrelation zu* R, definiert.

Einschub 1.4.6. ...

Im Fall $A = B$ entsteht die Umkehrrelation durch Spiegelung der Relation an der Winkelhalbierenden.

Einschub 1.4.7. ...

1.4.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.4.8. Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A (d.h. zwischen A und A) heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaftgen besitzt:

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: $a \sim a$
Symmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*.

Bemerkung 1.4.9. Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Grundmenge A in Teilmengen von A, die sogenannten *Äquivalenzklassen*, so dass jedes Element von A in genau einer der Äquivalenzklassen liegt. Die Äquivalenzklassen sind paarweise *disjunkt* (haben paarweise eine leere Schnittmenge) und ergeben als Vereinigung ganz A. Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ notieren wir als

$$[a] := \{b \in A \,|\, b \sim a\}.$$

Beispiele 1.4.10. Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Auf $A = B = \mathbb{Z}$ definiert

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \text{ ist durch } m \text{ teilbar}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo* m.

Einschub 1.4.11. ...

1.4.2 Ordnungsrelationen

Definition 1.4.12. Eine Relation R auf einer Menge A heißt *Ordnungsrelation* oder *Halbordnung*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: aRa
Antisymmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: aRb und $bRa \Rightarrow a = b$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: aRb und $bRc \Rightarrow aRc$

Eine Halbordnung R ist eine *totale Ordnung*, falls für alle $a, b \in A$ stets aRb oder bRa gilt.

Beispiele 1.4.13. Die Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ auf $A = B = \mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung. Die Teilmengen-Relation auf $\mathcal{P}(M)$ ist eine Halbordnung, die im Allgemeinen keine totale Ordnung ist.

Einschub 1.4.14. ...

1.4.3 Abbildungen, Funktionen

Abbildungen beziehungsweise Funktionen sind die mathematische Abstraktion eines *funktionalen Zusammenhangs*: Jedem Wert einer *unabhängigen* Größe wird genau ein Wert einer dann abhängigen Größe zugeordnet.

Die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs kann erfolgen durch die Angabe eines Terms oder (partiell) durch eine Wertetabelle oder (geometrisch) durch Zeichnung des *Graphen* der Zuordnung, also derjenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$, deren erste Koordinate die unabhängige Größe x und deren zweite Koordinate die x zugeordnete, abhängige Größe ist.

Beispiele 1.4.15.

a. Der Umfang U eines Kreises ist abhängig von seinem Radius r: $U = 2\pi r$.

b. Der Bremsweg eines Autos hängt von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

c. Die Füllhöhe eines kegelförmigen Glases hängt von der eingefüllten Wassermenge ab.

d. Durch den Ausweis wird einer Person (unabhängige Größe) ihre Körpergröße (abhängige Größe) zu geordnet oder ihre Augenfarbe (anhängige Größe) zugeordnet (das bedeutet die Größen müssen nicht quantifizierbar sein).

e. Durch den Börsenkurs wird Zeitpunkten der Kurswert einer Aktie zugeordnet (also auch bei quantifizierbaren Merkmalen muss der funktionale Zusammenhang nicht durch einen Term ausgedrückt werden können).

Einschub 1.4.16. ...

Definition 1.4.17. Seien A und B Mengen. Eine *Abbildung* von A nach B ist eine Relation $\Gamma \subseteq A \times B$ zwischen A und B, für die gilt:

a. Jedes Element aus A steht in Relation zu einem Element aus B, das bedeutet formal: zu jedem $a \in A$ existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in \Gamma$ gilt.

b. Jedes Element aus A steht in Relation zu höchstens einem Element aus B, das bedeutet formal: aus $(a, b) \in \Gamma$ und $(a, b') \in \Gamma$ folgt $b = b'$.

Die beiden Bedingungen der Definiton lassen sich zu einer zusammenfassen: Jedes Element aus A steht in Relation zu genau einem Element aus B.

Beispiele 1.4.18.

a. Der Graph eines funktionalen Zusammenhangs ist eine Abbildung.

b. Die Zuordnung, die einzelnen Studierenden das Geburtsdatum zuordnet, ist eine Abbildung.

c. Die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ ist keine Abbildung.

Einschub 1.4.19. ...

Notation 1.4.20. Üblicherweise notiert man Abbildungen $\Gamma \subseteq A \times B$ nicht als Teilmenge, sondern als *Zuordnung*

$$f : A \to B.$$

Man sagt: „f ist eine Abbildung von A nach B" oder kurz „f von A nach B". Die Menge A heißt dann *Definitionsbereich* und B *Wertebereich*.
Statt $(x, y) \in \Gamma$ schreibt man

$$y = f(x).$$

Man nennt $f(x)$ den *Wert*, den die Zuordnung f dem *Argument* (erster Wert) $x \in A$ zuordnet. Man sagt: „ $f(x)$ ist das Bild von x unter f".
Alternativ schreibt man auch

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x).$$

Beachte der Pfeil $\to$ steht zwischen den Mengen, zwischen denen f abbildet, hingegen steht $\mapsto$ zwischen dem Element x und dem zugeordneten Funktionswert $f(x)$. Den Term „$x \mapsto f(x)$ "nennt man *Zuordnungsvorschrift*.
Die Menge

$$\Gamma = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$

nennt man den *Graphen* von f.

Einschub 1.4.21. ...

Sind A und B Teilmengen der reellen Zahlen, so nennt man eine Abbildung $f : A \to B$ eine *Funktion*.

1.4.4 (Graphische) Darstellungen von Funktionen

Die Angabe einer Funktion besteht aus Angabe des Definitions- und Wertebereiches und der Zuordnungsvorschrift. Funktionen können dadurch visualisiert werden, dass man ihren Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem markiert. Mithilfe von Computern (Tabellenkalkulationsprogrammen oder Funktionenplottern) kann man diese Visualisierungen und auch Wertetabellen leicht herstellen.

Einschub 1.4.22. ...

Wenn Definitions- und Wertebereich aus dem Zusammenhang ersichtlich sind, kann man Funktionen auch nur durch ihren *Funktionsterm* zum Beispiel $f(x) = x^2$ oder auch $y = x^2$ definieren.

1.4.5 Funktionen in mehreren Variablen

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ordnet jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Zahl $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zu, zum Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$. Der Graph von f besteht dann aus einer Teilmenge des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$, nämlich:

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

In diesem Fall lässt sich der Graph $\Gamma(f)$ der Funktion f ist als eine „Fläche" im Raum („Gebirge") darstellen.

Einschub 1.4.23. ...

Den Graph von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man in einem dreidimensionalen Koordinatensystem (wie oben) perspektivisch darstellen oder durch spezielle zweidimensionale Graphiken, sogenannte *Höhenlinien*:

Die Höhenlinie $H_f(c)$ von f zur Höhe c, sind alle Punkte der Ebene, deren Bild unter f gleich c ist, d.h.

$$H_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = c\}.$$

Im Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$ sind die Höhenlinien leer, falls $c < 0$ bzw. der Ursprung, falls $c = 0$ bzw. ein Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius $\sqrt{c}$, falls $c > 0$. Die Höhenlinie $H_f(c)$ ist der Schnitt des Graphen von f mit der Ebene im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung $z = c$ beschrieben wird.

Einschub 1.4.24. ...

1.4.6 Umkehrrelationen von Funktionen

Eine Funktion f ist eindeutig bestimmt durch ihren Graphen $\Gamma(f)$. Die Relation $\Gamma(f)$ besitzt eine *Umkehrrelation*

$$\Gamma(f)^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Im Allgemeinen ist $\Gamma(f)^{-1}$ aber keine Funktion (wie z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$). Wenn die Umkehrrelation eine Funktion ist, so erhält man einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x.

Definition 1.4.25 (Umkehrfunktion)**.** Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ ist diejenige Funktion, welche

a. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$ und

b. $f(f^{-1}(y)) = x$ für alle $y \in B$

erfüllt.

Einschub 1.4.26. ...

Bemerkung 1.4.27. Nicht jede Funktion f hat eine Umkehrfunktion. Falls es eine gibt, nennt man sie wie in der Definition f^{-1} und sie erfüllt die Bedinungen der Definition. Wenn eine Funktion g die Bedingungen der Definition erfüllt, dann ist sie die Umkehrfunktion von f und man schreibt $g = f^{-1}$.

Beispiele 1.4.28. Der Umfang eines Kreises ist abhängig von dem Radius des Kreises:

$$U : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad U(r) := 2\pi r$$

Der Radius eines Kreises ist von dem Umfang des Kreises abhängig:

$$R : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad R(u) := \frac{u}{2\pi}.$$

Hier gilt also $U = R^{-1}$ und $R = U^{-1}$.

Einschub 1.4.29. ...