Kapitel 1

Grundlagen

In der Vorlesung befassen wir uns mit

- Modellierung von funktionalen Zusammenhängen, Approximationsprozesse:
  Dies führt auf Fragen aus der *Analysis*.
- Modellierung zufälliger Phänomene:
  Dies führt auf Fragen aus der *Stochastik* (stochastikós: altgriechisch für scharfsinnig im Vermuten), der Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls.

1.1 Zahlen

Beispiele für Zahlenmengen:

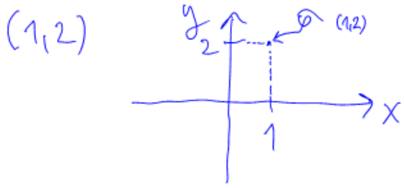
- Natürliche Zahlen: 1, 2, 3, ...; Notation als Menge: $\mathbb{N}$
  Die natürlichen Zahlen sind durch die sogenannten *PEANO-Axiome* festgelegt.
- Ganze Zahlen: 0, 1, -1, 2, -2, ...; Notation als Menge: $\mathbb{Z}$
  Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen, so dass man Differenzen bilden kann.
- Rationale Zahlen, z.B. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{Q}$
  Die rationalen Zahlen erweitern die ganzen Zahlen, so dass man (außer durch 0) dividieren kann.
- Reelle Zahlen: rationale Zahlen und solche Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, e, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{R}$
  Die reellen Zahlen erweitern die rationalen Zahlen, so dass der „Zahlenstrahl keine Lücken mehr aufweist". Wenn man mit reellen Zahlen rechnet, so rechnet man symbolisch (d.h. mit dem Symbol $\sqrt{2}$) oder man approximiert die reelle Zahl durch rationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2} \approx 1,41$) und rechnet näherungsweise mit dieser Zahl. Man erhält solche Näherungen z.B. aus der Dezimalbruchdarstellung, die reelle Zahlen besitzen. (Mehr Details zu Eigenschaften reeller Zahlen finden sich im Kapitel 2).

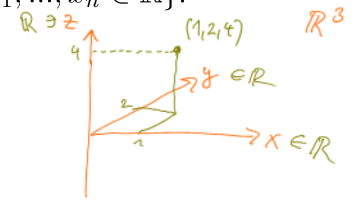
Der Aufbau des Zahlensystems von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{Q}$ wird ausführlich in der Veranstaltung Arithmetik und Algebra behandelt. Ergänzende Hinweise zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ erfolgen hier in späteren Kapiteln.

Messwerte. Messwerte sind Maßzahlen mit Maßeinheiten, z.B. 4 kg, 2,7 m usw.. Maßzahlen sind meist reelle Zahlen. Die Maßeinheit gibt die Dimension (oder den Größenwert)an. Konvention: Beim Rechnen rechnen wir nur mit den Maßzahlen und führen die Einheit am Ende in Klammern, z.B. $2 + 3 = 5$ [kg].

Variablen. Variablen sind Platzhalter für Zahlen oder andere Objekte, die man für die Variablen einsetzen kann. Typischerweise notiert man Variablen mit kleinen oder großen Buchstaben, z.B. x, y, z, A, B, C,... . Man unterscheidet *unabhängige* Variablen, in die man (ohne Einschränkungen) einfach einsetzen kann, und *abhängige* Variablen, deren Wert von einer anderen Variablen abhängt, z.B. ist y gegeben durch $y = x^2 + 1$ eine abhängige Variable. Mithilfe von abhängigen Variablen lassen sich „Zuordnungen" beschreiben: $x \mapsto y = x^2 + 1$. $\mathbb{Z} \ni x \longmapsto x^2+1 = y$
Treten viele Variablen auf, so notieren wir sie mit Indizes, z.B. $x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3$....

Zahlenpaare, Koordinatensystem. Während $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl veranschaulicht wird, werden Zahlenpaare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der Koordinatenebene dargestellt, z.B. im *kartesischen Koordinatensystem*, in dem die beiden Koordinatenachsen (Zahlenstrahle für den ersten und den zweiten Wert) senkrecht zueinander stehen oder in einem *affinen Koordinatensystem*, in dem die Achsen in einem Winkel zwischen 0 und 90 Grad zueinander stehen. Die Achsen werden - je nach Zusammenhang - unterschiedlich bezeichnet. Die horizontale Achse heißt häufig x- oder t-*Achse* oder *Abszisse*, die vertikale Achse entsprechend y-*Achse* oder *Ordinate*. Die Einheiten auf den Achsen dürfen unterschiedlich sein.
Als Menge notieren wir Paare reeller Zahlen als sog. *kartesisches Produkt*: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ werden - je nach Zusammenhang - notiert als Punkte $P(2; 4)$, $P(2|4)$ oder als 2-Tupel $\binom{2}{4}$, $(2, 4)$. Entsprechend definiert man *Zahlentripel* und n-*Tupel* durch $\mathbb{R}^3 := \underbrace{\mathbb{R}}_{x} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{y} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{z} := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ oder allgemeiner $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.





1.2 Aussagenlogik

1.2.1 Aussagen

Genau zu definieren, was eine mathematische Aussage ist, ist überraschend schwierig. Wir wollen möglichst praktisch bleiben und verwenden folgende

Definition 1.2.1. Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Diese Definition ist für unsere Zwecke ausreichend. Hier sind einige

Beispiele 1.2.2.

1 „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“

2 „Alle Katzen sind grau.“

3 „$0 = 1$ “

Nicht jeder Satz ist eine Aussage, hier einige

Beispiele 1.2.3.

1 „Öffne das Fenster!“

2 „Diese Aussage ist falsch.“

3 „n ist eine ungerade Zahl. “ $=: A(n)$

Einschub 1.2.4. ... (In 3) ist zB $n \in \mathbb{N}$ (eine Variable), deshalb nennt man dies eine Aussageform, zB $A(n)$. Eine Aussageform muss je nach Wert der Variable wahr / falsch sein.

Definition 1.2.5. Die *Negation* einer Aussage A ist diejenige Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist - und umgekehrt.

Die Negation einer Aussage A bezeichnet man mit Nicht(A) oder formaler mit $\neg A$.

Beispiele 1.2.6.

1 $\neg$(„Alle Katzen sind grau“) bedeutet „Es gibt eine Katze, die nicht grau ist.“

2 $\neg$(„$0 = 1$“) bedeutet „$0 \neq 1$“

1.2.2 UND, ODER

$\neg(A \wedge B)$

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist abhängig von der Verknüpfung. Wir betrachten ein Gnu sowie die Aussagen

Das G ist F und das G ist kein V

$$F = \text{Das Gnu ist ein Fisch},$$
$$S = \text{Das Gnu ist kein Säugetier},$$
$$W = \text{Das Gnu lebt ausschließlich im Wasser}.$$
$$V = \text{Das Gnu ist ein Vogel}.$$

$\neg(F \text{ und } \neg V) \mathrel{\hat{=}} \neg F \text{ oder } \neg(\neg V) \mathrel{\hat{=}} \neg F \text{ oder } V = \text{GikF oder GiV}$

Die Aussage „F und ¬ V“ ist falsch. Die Aussage „W oder ¬ S“ ist wahr.
Die Wahrheitswerte von mit und/oder verknüpften Aussagen werden durch Wahrheitstabellen festgelegt.

Einschub 1.2.7. ... Seien A, B Aussagen. $\wedge$ „=“ und $\vee$ „=“ oder

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Negationen von „und “ und „oder “ sind durch elegante Symmetrie miteinander verbunden.

$$\neg(A \wedge B) \quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \wedge \neg B$$

Einschub 1.2.8. ...

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w

1.2.3 Implikation

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist Aussage B wahr.“

Man sagt dann „A impliziert B “oder „Aus A folgt B“. Man notiert $A \Rightarrow B$.
Derartige Wenn/Dann Verknüpfungen können allerdings selbst wahr oder falsch sein. Außerdem gilt: aus dem Wahrheitswert der Implikation lassen sich keine Rückschlüsse auf den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ziehen.

Beispiele 1.2.9.

1 „Wenn ich Winston Churchill bin, dann bin ich Engländer. “

2 „Wenn ich Engländer bin, dann bin ich Winston Churchill. “

1.2.2 UND, ODER

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist abhängig von der Verknüpfung. Wir betrachten ein Gnu sowie die Aussagen

$$\begin{aligned} F &= \text{Das Gnu ist ein Fisch,} \\ S &= \text{Das Gnu ist kein Säugetier,} \\ W &= \text{Das Gnu lebt ausschließlich im Wasser.} \\ V &= \text{Das Gnu ist ein Vogel.} \end{aligned}$$

Die Aussage „F und ¬ V“ ist falsch. Die Aussage „W oder ¬ S“ ist wahr.
Die Wahrheitswerte von mit und/oder verknüpften Aussagen werden durch Wahrheitstabellen festgelegt.

Einschub 1.2.7. ...

Die Negationen von „und “ und „oder “ sind durch elegante Symmetrie miteinander verbunden.

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \wedge \neg B \end{aligned}$$

Einschub 1.2.8. ...

1.2.3 Implikation

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist Aussage B wahr.“

Man sagt dann „A impliziert B “oder „Aus A folgt B“. Man notiert $A \Rightarrow B$.
Derartige Wenn/Dann Verknüpfungen können allerdings selbst wahr oder falsch sein. Außerdem gilt: aus dem Wahrheitswert der Implikation lassen sich keine Rückschlüsse auf den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ziehen.

Beispiele 1.2.9.

1 „Wenn ich Winston Churchill bin, dann bin ich Engländer. “

2 „Wenn ich Engländer bin, dann bin ich Winston Churchill. “

3 Wenn x gerade ist, dann ist x^2 gerade.

4 Die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade.

Einschub 1.2.10. ... $\boxed{\text{Zu 3}}$ Sei $x \in \mathbb{Z}$. Beh x gerade $\Rightarrow$ x^2 gerade

Bew Da $x \in \mathbb{Z}$ gerade ist, gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{Z}$ so dass $x = 2 \cdot N$ gilt (Definition gerade Zahl). Dann folgt: $x^2 = (2 \cdot N)^2 = 4 \cdot N^2 = 2 \cdot 2 \cdot N^2 = 2 \cdot (2N^2)$. Weil $N \in \mathbb{Z}$ ist, ist auch $2 \cdot N^2 \in \mathbb{Z}$. Also ist x^2 gerade. □ $\boxed{\text{Zu 4}}$ "a gerade und b gerade $\Rightarrow$ $a+b$ gerade"

Bevor wir die Wahrheitstabelle der Implikation definieren betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiele 1.2.11. Die Aussage $1 = -1$ ist für die ganzen Zahlen $1, -1 \in \mathbb{Z}$ falsch. Allerdings können wir beide Seiten der Gleichung quadrieren und erhalten die wahre Aussage $1 = 1$. Daher ist die Implikation

$$\boxed{1 = -1 \ \Rightarrow \ 1 = 1} \leftarrow \text{wahre Aussage}$$

wahr. Hier ein weiteres Beispiel:

Einschub 1.2.12. ... "Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: n durch 4 teilbar $\Rightarrow$ n gerade." Diese Aussage ist wahr, also auch für spezielle $n \in \mathbb{N}$:

$n=1$ 1 ist durch 4 teilbar $\Rightarrow$ 1 gerade f $\Rightarrow$ f ✗

$n=2$ 2 ist durch 4 tb $\Rightarrow$ 2 gerade f $\Rightarrow$ w

$n=3$ 3 ist durch 4 tb $\Rightarrow$ 3 gerade f $\Rightarrow$ f –

$n=4$ 4 ist durch 4 tb $\Rightarrow$ 4 gerade w $\Rightarrow$ w

Es folgt nun die Wahrheitstabelle für die Implikation.

Einschub 1.2.13. ...

A	B	A ⇒ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Definition 1.2.14. Zwei Aussagen A und B heißen *äquivalent*, wenn sowohl $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind. Man schreibt dann $A \Leftrightarrow B$. "Äquivalenzpfeil"

Beispiele 1.2.15.

1 „$x > 5 \Leftrightarrow -x < -5$“ ist wahr.

2 „Die Straße ist nass. $\Leftrightarrow$ Es regnet.“ ist falsch

die Aussage

3 $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ist falsch.

wahr ist: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Einschub 1.2.16. ... $A(x)$ sei „$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$“. Wir prüfen ob $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr ist. $x \neq 3$ „$x^2 = 9$“ falsch, „$x = 3$“ falsch, also sind die Wahrheitswerte von $A(x)$: $f \Leftrightarrow f$ ist wahr laut 1.2.13 $x = 3$ „$x^2 = 9$“ wahr, „$x = 3$“ wahr, also $A(x)$: $w \Leftrightarrow w$ ist wahr $x = -3$ „$x^2 = 9$“ wahr, „$x = 3$“ falsch also $A(x)$: $w \Leftrightarrow f$ ist falsch, denn: $w \Rightarrow f$ ist eine falsche Aussage.

1.3 Mengen

Viele mathematische Sachverhalte werden ‚mengentheoretisch' formuliert. In diesem Sinne ist die Mengenlehre so etwas wie die Sprache der Mathematik.

Naives Verständnis von Mengen:
Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Wohlbestimmt bedeutet, dass eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt x zu einer Menge M gehört, wir schreiben dann

$$x \in M,$$

$M = \{2, 4\}$ ok

oder nicht, wir schreiben dann

$N = \{2, 2\}$ schreibe als $N = \{2\}$

$$x \notin M.$$

Wohlunterschieden bedeutet, dass kein Element mehrfach zu einer Menge gehört.

Eine Menge A heißt *(echte) Teilmenge* von M falls jedes Element von A auch ein Element in M ist (bzw. und zusätzlich $A \neq M$ ist). Man notiert $A \subset M$. Man kann Mengen *explizit*, indem man eine Liste aller Elemente angibt, oder *implizit* beschreiben, indem man die Menge als die Teilmenge einer anderen Menge angibt, in der alle Elemente mit einer gewissen Eigenschaft zusammengefasst sind.

Beispiel 1.3.1.

a) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ist implizit beschrieben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}$$

und explizit durch $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ $= \{-1, 1\}$ (Tippfehler)

b) *Intervalle* sind Teilmengen der reellen Zahlen

- *abgeschlossenes* Intervall von a bis b:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$(-1, 5]$

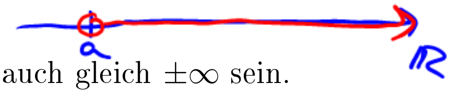
- *halboffene* Intervalle von a bis b:

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

- *offenes* Intervall von a bis b:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



Die Zahlen a und b heißen *Eckpunkte* des Intervalls. a oder b können auch gleich $\pm\infty$ sein.

c) Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist die Menge ohne Elemente und kann z.B. wie folgt angegeben werden: $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x > 1\}$

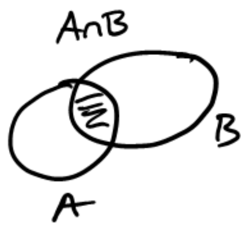
Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten: $A = B$ genau dann, wenn $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ also genau dann, wenn $A \cancel{\subseteq} B$ und $B \cancel{\subseteq} A$ gilt. Dies kann man zum Beispiel durch vollständige Fallunterscheidung beweisen.

$A \subset B \quad B \subset A$

Mengentheoretische Operationen (Teil 1)
Seien A, B Teilmengen von M.

Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B:

$$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

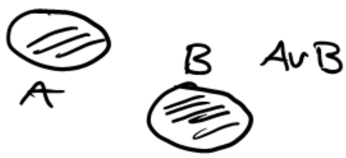


Vereinigung(smenge) von A und B:

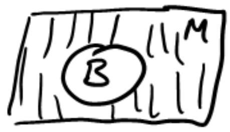
$$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(Mengen-)Differenz von A und B (auch *Komplement von B in A*):

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$



Ist $A = M$, so heißt $B^C := M \setminus B$ *Komplement von B*.



B^C

Einschub 1.3.2. ...

$A = \{\triangle, \square, \circ\}, \quad B = \{\triangle, \triangle\}$

$A \cap B = \{\triangle\}, \quad A \cup B = \{\triangle, \square, \circ, \triangle\}$

$G := \{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \setminus G = \{1, 3, 5, \ldots\}$

$M \subset M$

Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge* ~~von~~ M.

Einschub 1.3.3. ... $M = \{a, x\}, \quad \mathcal{P}(M) = \{M, \{a\}, \{x\}, \emptyset\}$

Beh $\emptyset \subset M$

$a \in M$

$\{a\} \in \mathcal{P}(M)$

Bew wir zeigen: $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in M$ ist eine wahre Aussage.

Dazu betrachten die Wahrheitswerte:

f $\Rightarrow$ f (falls $x \notin M$)
f $\Rightarrow$ w (falls $x \in M$)
} ist wahre Aussage ▷

Man kann zeigen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

geordnetes Tupel

ist nicht: offenes Intervall

(*Kartesisches*) *Produkt* von A und B:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das ist ist also die Menge aller geordneten Paare bestehend aus Elementen von A (erster Eintrag) und Elementen von B (zweiter Eintrag).

Einschub 1.3.4. ... ① $A = \{T(isch), S(tuhl), W(eihnachtsbaum)\}$

$B = \{g(rün), r(ot)\}$ ⚠ $(T,g) \neq (g,T) \in B \times A$

$A \times B = \{(T,g), (T,r), (S,g), (S,r), (W,g), (W,r)\}$

②

$[1,2] \times [1,3] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2], y \in [1,3]\}$

③ $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Außerdem gibt es **Rechengesetze für Mengen:**

kommutativ

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

assoziativ   distributiv

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Einschub 1.3.5. ... $A \subset B$ beweisen: zu zeigen ist: "$x \in A \Rightarrow x \in B$" ist wahr. Wir zeigen: $(a,b) \subset [a,b]$

$x \in (a,b) \overset{\text{Dfn}}{\Leftrightarrow} a < x < b$

$\Rightarrow a \le x \le b \overset{\text{Dfn}}{\Leftrightarrow} x \in [a,b]$

$a < x \Rightarrow a < x \lor a = x \overset{\text{Dfn}}{\Leftrightarrow} a \le x$

$w \Rightarrow \underbrace{w \lor f}_{w}$

1.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition 1.4.1 (Relation)**.** Seien A und B Mengen. Eine *Relation zwischen A und B* ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Ist ein Paar (a, b) Element von R, so sagt man dann, dass a in Relation R zu b steht. Wir schreiben in diesem Fall: aRb.

Einschub 1.4.2. ...

Beispiel 1.4.3.

- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{R}$, Gleichheitsrelation, Teilbarkeitsrelation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Geraden, Kreise, Parabeln in $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 2)

- *abgeschlossenes* Intervall von a bis b:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- *halboffene* Intervalle von a bis b:

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

- *offenes* Intervall von a bis b:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Die Zahlen a und b heißen *Eckpunkte* des Intervalls. a oder b können auch gleich $\pm\infty$ sein.

c) Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist die Menge ohne Elemente und kann z.B. wie folgt angegeben werden: $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x > 1\}$

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten: $A = B$ genau dann, wenn $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ also genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subset A$ gilt. Dies kann man zum Beispiel durch vollständige Fallunterscheidung beweisen.

Mengentheoretische Operationen (Teil 1)
Seien A, B Teilmengen von M.

Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B:

$$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Vereinigung(smenge) von A und B:

$$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(Mengen-)Differenz von A und B (auch *Komplement von B in A*):

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ist $A = M$, so heißt $B^C := M \setminus B$ *Komplement von B*.

Einschub 1.3.2. ... 1) ZZ: $A\setminus B = A \cap B^C$ Bew „$\subseteq$" $x \in A\setminus B \overset{\text{Dfn}}{\Longleftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B$

„$\supseteq$" $x \in A \cap B^C \overset{\text{Dfn}}{\Longleftrightarrow} x \in A \wedge x \in B^C \overset{\text{Dfn}}{\Longrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \Longrightarrow x \in A \setminus B$ □

Kurz Bew $x \in A\setminus B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ □

2) ZZ: $A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A \neq \emptyset$

Bew ZZ: $A \cap B = A$ „$\subseteq$" $\boxed{x \in A \cap B} \overset{\text{Dfn}}{\Longrightarrow} x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow x \in A$

„$\supseteq$" $x \in A$ zz $x \in A \cap B$: $x \in A \overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow} x \in B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \overset{\text{Dfn}}{\Longrightarrow} x \in A \cap B$ □

Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge von M*.

Einschub 1.3.3. ...

(Kartesisches) Produkt von A und B:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das ist ist also die Menge aller geordneten Paare bestehend aus Elementen von A (erster Eintrag) und Elementen von B (zweiter Eintrag).

Einschub 1.3.4. ...

Außerdem gibt es **Rechengesetze für Mengen:**

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

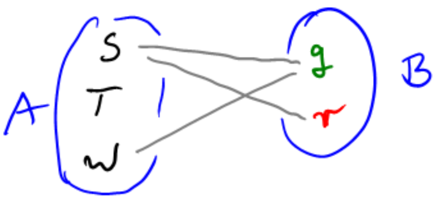
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Einschub 1.3.5. ...

1.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition 1.4.1 (Relation)**.** Seien A und B Mengen. Eine *Relation zwischen A und B* ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$. Ist ein Paar (a, b) Element von R, so sagt man dann, dass a in Relation R zu b steht. Wir schreiben in diesem Fall: aRb.

Einschub 1.4.2. ... $A = \{S, T, W\}$, $B = \{g, r\}$ Relation zwischen A und B : "Gegenstand kommt mit Farbe vor"



$R = \{(S, g), (S, r), (W, g)\} \subset A \times B$

$S R g$

$R^{-1} = \{(g, S), (r, S), (g, W)\}$ Einschub 1.4.6

Beispiel 1.4.3.

1) • Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{N}$

2) • Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{R}$, Gleichheitsrelation, Teilbarkeitsrelation auf $A = B = \mathbb{N}$

• Geraden, Kreise, Parabeln in $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 2) 3) Hörsaalrelation

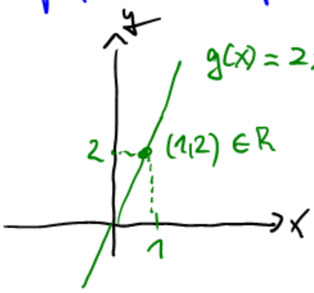
Einschub 1.4.4. ... 1) $a,b \in \mathbb{N}$, "$R = \leq$", $a \leq b :\Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$, $\leq \; = R = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,2), (2,3), \dots \dots\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$1R1$ $\qquad$ $2R3$

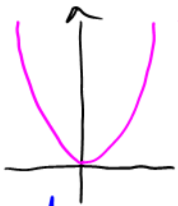
2) "$=$" $= R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}$, $2R2$

3) $S := \{$ Studis im HS $\}$, $R \subset S \times S$, $xRy :\Leftrightarrow x$ sitzt in der selben Reihe wie y

4) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt eine Relation auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel der Graph einer Funktion ($\leftarrow$ später genauer)

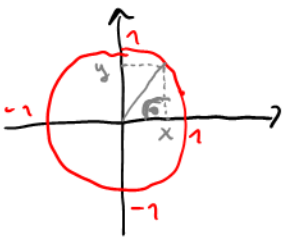


$g(x) = 2x$ $\quad$ $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\} = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $aRb \Leftrightarrow b = 2a$



$h(x) = x^2$ $\quad$ $R' = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $aR'b \Leftrightarrow a^2 = b$

Teilmengen müssen nicht immer Graphen von Funktionen sein:



$\tilde{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$x^2 + y^2 = 1^2$ Pythagoras

Definition 1.4.5 (Umkehrrelation)**.** Ist $R \subset A \times B$ eine Relation von A nach B, so ist durch

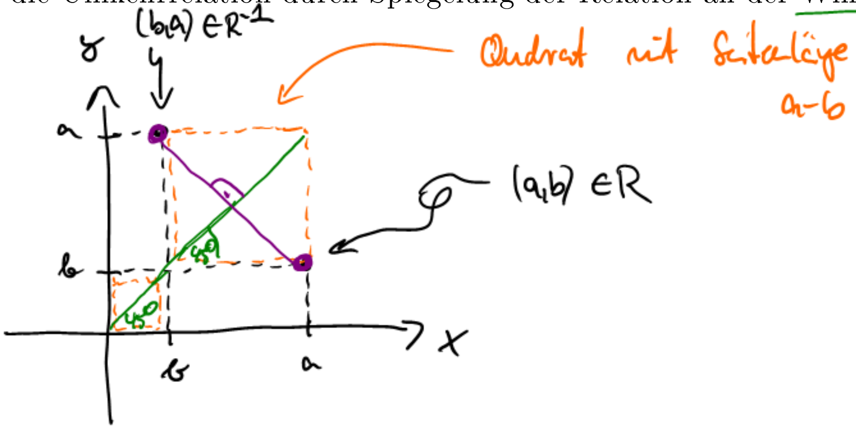
$$R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \mid aRb\}$$

eine Relation von B nach A, die sogenannte *Umkehrrelation zu* R, definiert.

Einschub 1.4.6. ... Im obigen Beispiel ist R^{-1}: Farbe kommt als Farbe von Gegenstand vor, $R^{-1} = \{ ($ siehe oben ... $\}$

Im Fall $A = B$ entsteht die Umkehrrelation durch Spiegelung der Relation an der Winkelhalbierenden.

Einschub 1.4.7. ...



1.4.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.4.8. Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A (d.h. zwischen A und A) heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaftgen besitzt:

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: $a \sim a$
Symmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*.

Bemerkung 1.4.9. Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Grundmenge A in Teilmengen von A, die sogenannten *Äquivalenzklassen*, so dass jedes Element von A in genau einer der Äquivalenzklassen liegt. Die Äquivalenzklassen sind paarweise *disjunkt* (haben paarweise eine leere Schnittmenge) und ergeben als Vereinigung ganz A. Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ notieren wir als

$$[a] := \{b \in A \,|\, b \sim a\}. \qquad a \in [a]$$

Beispiele 1.4.10. Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Auf $A = B = \mathbb{Z}$ definiert

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad \boxed{b - a \text{ ist durch } m \text{ teilbar}} \qquad m \mid b-a$$

2)

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo* m.

Einschub 1.4.11. 1) Hörsaalrelation II: $S = \{\text{Studis im Hörsaal}\}$

$xR'y :\Leftrightarrow$ x und y sitzen in derselben Reihe <u>oder</u> im derselben Spalte

ist nicht transitiv also keine ÄR

2) $a,b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m > 1$: $a \sim b :\Leftrightarrow m \mid b-a$ <u>Beh</u> $\sim$ ist ÄR

<u>Bew</u> <u>reflexiv</u> $a \in \mathbb{Z}$: $a \sim a \Leftrightarrow m \mid a-a = 0$ ✓

<u>symmetrisch</u> $a \sim b \Rightarrow m \mid b-a \Rightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{Z}$ so dass $m \cdot N = b-a$

$\overset{(\cdot -1)}{\Rightarrow} m \cdot (-N) = -b+a \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow b \sim a$

<u>transitiv</u> $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow m \mid b-a,\ m \mid c-b \Rightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{Z}$

und $N' \in \mathbb{Z}$ so dass gilt: $m \cdot N = b-a,\ m \cdot N' = c-b$

$$\Rightarrow c-a = c\underbrace{-b+b}_{=0}-a = m \cdot N' + m \cdot N = m(N'+N)$$

$\Rightarrow m \mid c-a \Rightarrow a \sim c$ $\square$

<u>Äquivalenzklassen</u> <u>modulo m</u> $\sim$ ist ÄR auf $\mathbb{Z}$, daher wird $\mathbb{Z}$

in Klassen zerlegt: $[1] = \{1 + k \cdot m \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, 1-2m, 1-m,$

$1+0 \cdot m, 1+m, 1+2m, \ldots\}$. Dann gilt, $a,b \in [1]$: $b-a =$

$= 1 + k_b \cdot m - (1 + k_a \cdot m) = m(k_b - k_a) \Rightarrow m \mid b-a$ (für k_b $\boxed{\text{für}}$)

$\Rightarrow a \sim b$. Genauso für $[z]$ mit $z \in \mathbb{Z}$:

$$\ldots = [-m] = [0] = [m] = [2m]$$
$$\ldots = [1-m] = [1] = [1+m] = [1+2m] = \ldots$$
$$\ldots = [2] = [2+m] = [2+2m] = \ldots$$
$$\vdots$$
$$\ldots = [m-1-m] = [m-1] = [m-1+m] = \ldots$$
$$[m]$$

disjunkte Vereinigung

Man erkennt (ohne Beweis): 1) $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$

2) $\mathbb{Z} = \biguplus_{z \in \mathbb{Z}} [z]$

Definition 1.4.5 (Umkehrrelation)**.** Ist $R \subset A \times B$ eine Relation von A nach B, so ist durch

$$R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

eine Relation von B nach A, die sogenannte *Umkehrrelation zu* R, definiert.

Einschub 1.4.6. ...

Im Fall $A = B$ entsteht die Umkehrrelation durch Spiegelung der Relation an der Winkelhalbierenden.

Einschub 1.4.7. ...

1.4.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.4.8. Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A (d.h. zwischen A und A) heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaftgen besitzt:

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: $a \sim a$
Symmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*.

Bemerkung 1.4.9. Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Grundmenge A in Teilmengen von A, die sogenannten *Äquivalenzklassen*, so dass jedes Element von A in genau einer der Äquivalenzklassen liegt. Die Äquivalenzklassen sind paarweise *disjunkt* (haben paarweise eine leere Schnittmenge) und ergeben als Vereinigung ganz A. Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ notieren wir als

$$[a] := \{b \in A \,|\, b \sim a\}.$$

Beispiele 1.4.10. Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Auf $A = B = \mathbb{Z}$ definiert

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \;\text{ ist durch } m \text{ teilbar}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo* m.

teilen durch 4

$\underline{m=4}$ $\quad [1] = \{1 + k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$ Rest 1

$[0] = \{0 + k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$ = Rest 0

$[2] = \{2 + k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$ Rest 2

Einschub 1.4.11. ...

$[3] = \{3 + k\cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$ Rest 3

$[4] = \{\underbrace{4 + k\cdot 4} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} = [0]$ Rest 4 $\hat{=}$ Rest 0

$= \{0 + 4(1+k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[5] = [1]$, $[6] = [2] = [10] = [14] = \ldots$

1 Beh $a \sim b \iff [a] = [b]$

2 Beh $a \sim b \iff$ a und b lassen beim Teilen durch m denselben Rest

1.4.2 Ordnungsrelationen

Definition 1.4.12. Eine Relation R auf einer Menge A heißt *Ordnungsrelation* oder *Halbordnung*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Erinnerung Symmetrie bei ÄR
$\forall x,y: x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: aRa
Antisymmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: aRb und $bRa \Rightarrow a = b$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: aRb und $bRc \Rightarrow aRc$

Eine Halbordnung R ist eine *totale Ordnung*, falls für alle $a, b \in A$ stets aRb oder bRa gilt.

Beispiele 1.4.13. Die Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ auf $A = B = \mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung. Die Teilmengen-Relation auf $\mathcal{P}(M)$ ist eine Halbordnung, die im Allgemeinen keine totale Ordnung ist.

Einschub 1.4.14. ... $M = \{1,2,3\}$, $R \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ sei die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(M)$: für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$ $:\Leftrightarrow$ $A \subset B$ (*) (für $A, B \in \mathcal{P}(M)$)

reflexiv $A \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow A \subset A \Rightarrow ARA$ ✓

antisymmetrisch ARB und $BRA \Rightarrow A \subset B$ und $B \subset A \Rightarrow A \subset B \subset A$ ✓ ✓

$\Rightarrow$ $A = B$ ✓ transitiv $A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow A \subset B \subset C$

$\Rightarrow A \subset C \Rightarrow ARC$ □

$A = B \overset{\text{Dfn}}{:\Leftrightarrow} A \subset B$ und $B \subset A$

für alle (*) $\bullet\, XRY :\Leftrightarrow X \subset Y$

$\forall X, Y \in \mathcal{P}(M)$: $\bullet\, BRA :\Leftrightarrow B \subset A$

$\bullet\, A, B \in \mathcal{P}(M)$

aber für $\{1,2\}, \{2,3\} \in \mathcal{P}(M)$ gilt

$\{1,2\} \not\subset \{2,3\}$ und $\{2,3\} \not\subset \{1,2\}$

also sind $\{1,2\}$ und $\{2,3\}$ mit der Teilmengenrelation "$\subset$" nicht vergleichbar. Daher ist dies keine totale Ordnung.

1.4.3 Abbildungen, Funktionen

Abbildungen beziehungsweise Funktionen sind die mathematische Abstraktion eines *funktionalen Zusammenhangs*: Jedem Wert einer *unabhängigen* Größe wird genau ein Wert einer dann abhängigen Größe zugeordnet.

Die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs kann erfolgen durch die Angabe eines Terms oder (partiell) durch eine Wertetabelle oder (geometrisch) durch Zeichnung des *Graphen* der Zuordnung, also derjenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$, deren erste Koordinate die unabhängige Größe x und deren zweite Koordinate die x zugeordnete, abhängige Größe ist.

Beispiele 1.4.15. $U(r) = 2\pi r$

a. Der Umfang U eines Kreises ist abhängig von seinem Radius r: $U = 2\pi r$.

b. Der Bremsweg eines Autos hängt von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

c. Die Füllhöhe eines kegelförmigen Glases hängt von der eingefüllten Wassermenge ab.

d. Durch den Ausweis wird einer Person (unabhängige Größe) ihre Körpergröße (abhängige Größe) zu geordnet oder ihre Augenfarbe (anhängige Größe) zugeordnet (das bedeutet die Größen müssen nicht quantifizierbar sein).

e. Durch den Börsenkurs wird Zeitpunkten der Kurswert einer Aktie zugeordnet (also auch bei quantifizierbaren Merkmalen muss der funktionale Zusammenhang nicht durch einen Term ausgedrückt werden können).

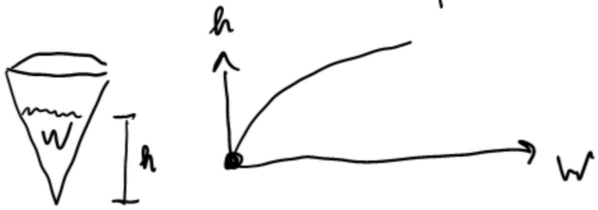
Einschub 1.4.16. ...

b)

v	10	15	20
$B(v)$	20	40	80

jedem W wird genau ein h zugeordnet

c)



e)

R

Definition 1.4.17. Seien A und B Mengen. Eine *Abbildung* von A nach B ist eine Relation $\Gamma \subset A \times B$ zwischen A und B, für die gilt:

a. Jedes Element aus A steht in Relation zu einem Element aus B, das bedeutet formal: zu jedem $a \in A$ existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in \Gamma$ gilt. $a \Gamma b$

b. Jedes Element aus A steht in Relation zu höchstens einem Element aus B, das bedeutet formal: aus $(a, b) \in \Gamma$ und $(a, b') \in \Gamma$ folgt $b = b'$.

Die beiden Bedingungen der Definiton lassen sich zu einer zusammenfassen: Jedes Element aus A steht in Relation zu genau einem Element aus B.

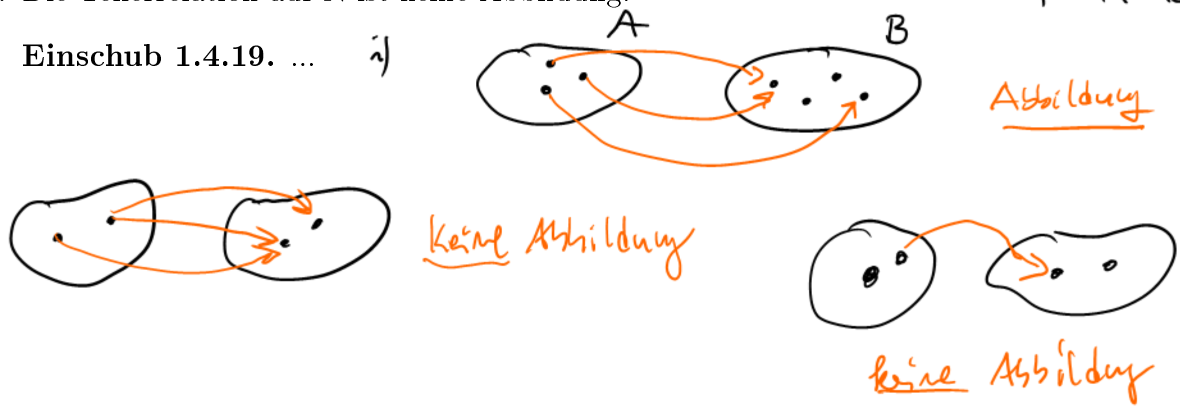
Beispiele 1.4.18.

a. Der Graph eines funktionalen Zusammenhangs ist eine Abbildung. (*)

b. Die Zuordnung, die einzelnen Studierenden das Geburtsdatum zuordnet, ist eine Abbildung.

c. Die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ ist keine Abbildung. $\Gamma \subset A \times B$

Einschub 1.4.19. ... i)



Notation 1.4.20. Üblicherweise notiert man Abbildungen $\Gamma \subset A \times B$ nicht als Teilmenge, sondern als *Zuordnung*

$(x,y) \in A \times B$

$$f : A \to B.$$

Man sagt: „f ist eine Abbildung von A nach B" oder kurz „f von A nach B". Die Menge A heißt dann *Definitionsbereich* und B *Wertebereich*.

Statt $(x, y) \in \Gamma$ schreibt man

$$y = f(x).$$

Man nennt $f(x)$ den *Wert*, den die Zuordnung f dem *Argument* (erster Wert) $x \in A$ zuordnet. Man sagt: „ $f(x)$ ist das Bild von x unter f".

Alternativ schreibt man auch

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x).$$

Beachte der Pfeil $\to$ steht zwischen den Mengen, zwischen denen f abbildet, hingegen steht $\mapsto$ zwischen dem Element x und dem zugeordneten Funktionswert $f(x)$. Den Term „$x \mapsto f(x)$ "nennt man *Zuordnungsvorschrift*.

Die Menge

$$\Gamma = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$

nennt man den *Graphen* von f.

Zuordnungsvorschrift

Einschub 1.4.21. ... $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto j(t) := t^2 + 1$

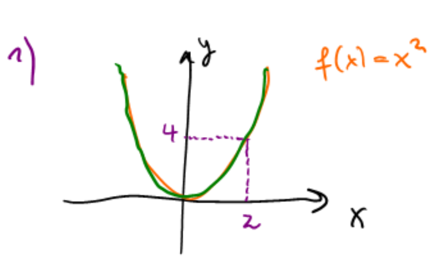
Definitionsbereich Wertebereich

Sind A und B Teilmengen der reellen Zahlen, so nennt man eine Abbildung $f : A \to B$ eine *Funktion*.

1.4.4 (Graphische) Darstellungen von Funktionen

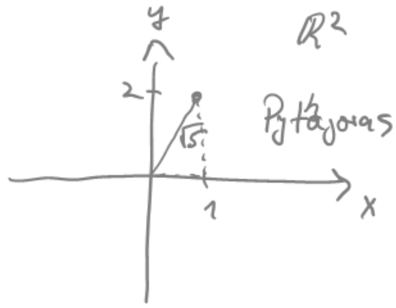
Die Angabe einer Funktion besteht aus Angabe des Definitions- und Wertebereiches und der Zuordnungsvorschrift. Funktionen können dadurch visualisiert werden, dass man ihren Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem markiert. Mithilfe von Computern (Tabellenkalkulationsprogrammen oder Funktionenplottern) kann man diese Visualisierungen und auch Wertetabellen leicht herstellen.

Einschub 1.4.22. ...

1) 

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

$\Gamma(f) = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$



2) $f: \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2$

$(1,2) \mapsto 5$

Wenn Definitions- und Wertebereich aus dem Zusammenhang ersichtlich sind, kann man Funktionen auch nur durch ihren *Funktionsterm* zum Beispiel $f(x) = x^2$ oder auch $y = x^2$ definieren.

1.4.5 Funktionen in mehreren Variablen

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ordnet jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Zahl $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zu, zum Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$. Der Graph von f besteht dann aus einer Teilmenge des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$, nämlich:

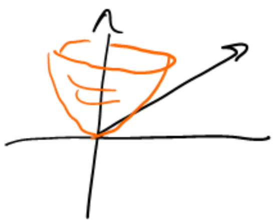
$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

In diesem Fall lässt sich der Graph $\Gamma(f)$ der Funktion f ist als eine „Fläche" im Raum („Gebirge") darstellen.

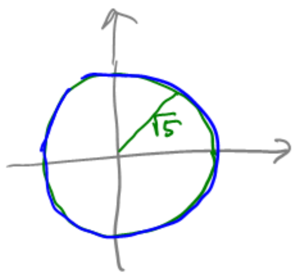
Einschub 1.4.23. ...

Geogebra: 3D-Rechner

$x^2 + y^2 = \sqrt{5}^2$



$H_f(5) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 5 \}$



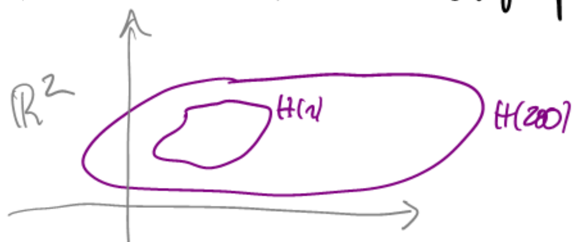
Den Graph von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man in einem dreidimensionalen Koordinatensystem (wie oben) perspektivisch darstellen oder durch spezielle zweidimensionale Graphiken, sogenannte *Höhenlinien*: Die Höhenlinie $H_f(c)$ von f zur Höhe c, sind alle Punkte der Ebene, deren Bild unter f gleich c ist, d.h.

$$H_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

Im Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$ sind die Höhenlinien leer, falls $c < 0$ bzw. der Ursprung, falls $c = 0$ bzw. ein Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius $\sqrt{c}$, falls $c > 0$. Die Höhenlinie $H_f(c)$ ist der Schnitt des Graphen von f mit der Ebene im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung $z = c$ beschrieben wird.

Einschub 1.4.24. ... Die Höhenlinien ergeben sich aus waagerechten Schnitten mit den 3-dimensionalen Funktionsgraphen

von Ebenen



1.4.6 Umkehrrelationen von Funktionen

Eine Funktion f ist eindeutig bestimmt durch ihren Graphen $\Gamma(f)$. Die Relation $\Gamma(f)$ besitzt eine *Umkehrrelation*

$$\Gamma(f)^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Im Allgemeinen ist $\Gamma(f)^{-1}$ aber keine Funktion (wie z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$). Wenn die Umkehrrelation eine Funktion ist, so erhält man einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x.

Definition 1.4.25 (Umkehrfunktion)**.** Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ ist diejenige Funktion, welche

a. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$ und

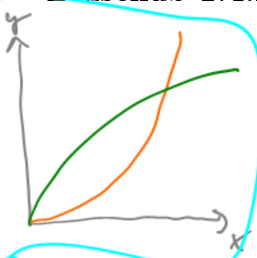
b. $f(f^{-1}(y)) = \cancel{x}\ y$ für alle $y \in B$

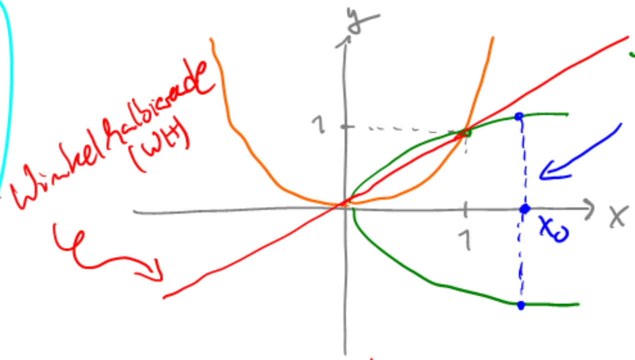
erfüllt.

$$\boxed{\begin{aligned} g(f(x)) &= x \\ f(g(y)) &= y \end{aligned}}$$

Einschub 1.4.26. ... $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ \Gamma(f) = \{(x, \overbrace{x^2}^{=f(x)}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\Gamma(f)^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$





$\Gamma(f)^{-1}$ ist keine Funktion da es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, dem zwei y-Werte zugeordnet werden

$\Gamma(f)^{-1}$ ergibt sich aus $\Gamma(f)$ durch Spiegelung an der WH (1.4.6)

aber: für $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$ ist $\Gamma(f)^{-1}$ eine Funktion

Bemerkung 1.4.27. Nicht jede Funktion f hat eine Umkehrfunktion. Falls es eine gibt, nennt man sie wie in der Definition f^{-1} und sie erfüllt die Bedinungen der Definition. Wenn eine Funktion g die Bedingungen der Definition erfüllt, dann ist sie die Umkehrfunktion von f und man schreibt $g = f^{-1}$.

Beispiele 1.4.28. Der Umfang eines Kreises ist abhängig von dem Radius des Kreises:

$$U : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad U(r) := 2\pi r$$

$U = 2\pi r \iff r = \frac{U}{2\pi}$

Der Radius eines Kreises ist von dem Umfang des Kreises abhängig:

$$R : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad R(u) := \frac{u}{2\pi}.$$

Umstellen nach "r" um Umkehrfunktion zu berechnen

Hier gilt also $U = R^{-1}$ und $R = U^{-1}$.

Einschub 1.4.29. ...

$$R(U(r)) = R(2\pi r) = \frac{2\pi r}{2\pi} = r$$

$$U(R(u)) = U\left(\frac{u}{2\pi}\right) = 2\pi \cdot \frac{u}{2\pi} = u$$

Kapitel 2

Lineare Funktionen

Im Folgenden werden wir besondere Klassen von Funktionen für die Modellierung von funktionalen Zusammenhängen genauer untersuchen:

Definition 2.0.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linear*, wenn es reelle Zahlen a und b gibt, so dass $f(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Im Spezialfall $a = 0$ heißt f *konstant*. Ist $b = 0$, so heißt f *proportional* oder ~~*homogen-linear*~~ und a *Proportionalitätsfaktor*. $f(x) = b$ $f(x) = ax \rightsquigarrow f(0) = 0$

Bemerkung 2.0.2. Konstante Funktionen beschreiben funktionale Zusammenhänge, in denen eine Veränderung der unabhängigen Größe x keine Veränderung der abhängigen Größe $f(x)$ bewirkt. Daher sind sie an sich eher uninteressant, werden aber zum Beispiel gebraucht, um ein solches Verhalten in Abgrenzung zu anderem Verhalten darzustellen (z.B. Flatrate-Gebühr versus Volumentarif beim Handy, Kosten für eine Dauerkarte für Sportveranstaltungen versus Kosten für einzelne Eintrittskarten).

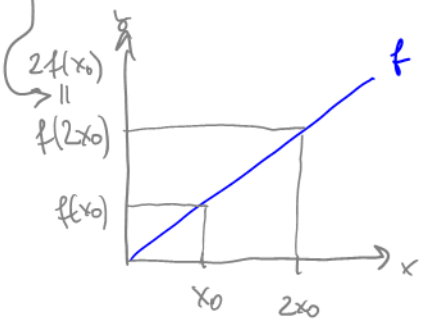
2.1 Proportionale Funktionen

Satz 2.1.1. *Für eine proportionale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für alle $r, x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:*

$$f(r \cdot x) \overset{\text{homogen}}{=} r \cdot f(x) \quad \text{und} \quad \overset{\text{linear}}{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}.$$

Dem Doppelten, Dreifachen, r-fachen des Arguments wird also durch eine proportionale Funktion der doppelte, dreifachen, r-fache Funktionswert zugeordnet. Geometrisch bedeutet diese Eigenschaft, dass die Punkte des Graphen einer proportionalen Funktion auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Einschub 2.1.2. ...



1 Bch $f(r\cdot x) = r\cdot f(x)$ 1 Bew Weil f proportional ist gilt, $f(x) = ax$. Also: $f(r\cdot x) \overset{\text{Dfn}}{=} a\cdot(rx) \overset{\text{Asso}}{=} (ar)x$

$\boxed{\text{nach Definition}}$ $\overset{\text{kommu}}{=} (ra\,x) \overset{\text{asso}}{=} r(ax) \overset{\text{Dfn}}{=} r\,f(x)$

2 Bch $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ 2 Bew $f(x_1+x_2) \overset{\text{Vor}}{=} a\cdot(x_1+x_2) \overset{\text{distr.}}{=} ax_1 + ax_2 \overset{\text{Dfn}}{=} f(x_1)+f(x_2)$ □

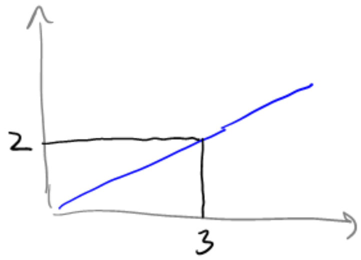
Beweisidee: Einsetzen in den Funktionsterm und Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz anwenden.

Folgerung 2.1.3. *Kennt man von einer proportionalen Funktion f den Funktionswert an einer Stelle $x_0 \neq 0$, so kennt man alle Funktionswerte. Es gilt nämlich:*

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x,$$

Einschub 2.1.4. ... Beh $f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x$ Bew Sei $x_0 \neq 0$. Dann:

$$f(x_0) \overset{\text{Dfn}}{=} a x_0 \overset{x_0 \neq 0}{\Rightarrow} a = \frac{f(x_0)}{x_0} \Rightarrow f(x) \overset{\text{Dfn}}{=} ax = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x \quad \square$$



Wissen

$f(3) = 2$ und f proportional $\overset{2.1.3}{\Rightarrow}$ $x_0 = 3$,

$$a = \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{f(3)}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{f(3)}{3} \cdot x = \frac{2}{3} x$$

„Steigungsdreieck"

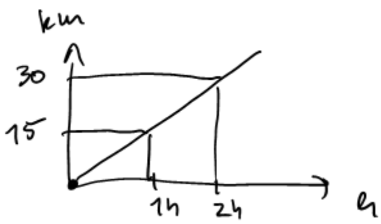
d.h. $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$ *ist der Proportionalitätsfaktor, insbesondere für* $x_0 = 1$ *also* $a = f(1)$.

Obwohl Proportionalität eine der einfachsten funktionalen Zusammenhänge ist, hat sie zahlreiche Anwendungen:

Beispiele 2.1.5.

- Gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_0: Sei $s(t)$ die zurückgelegte Strecke nach der Zeit t, dann gilt: $s(t) = v_0 \cdot t$.

  Einschub 2.1.6. ... $v_0 = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

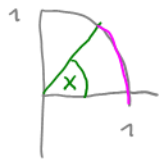
  $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

  $f(t) = v_0 \cdot t$

- Umrechnungen: Einheiten (Meter in Kilometer, Stunden in Sekunden, usw.), Wechselkurse, Grad in Bogenmaß bei Winkeln (Proportionalitätsfaktor ist hier $\frac{2\pi}{360}$), Maßstäbe bei Landkarten

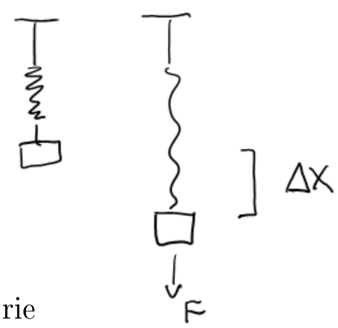
  Einschub 2.1.7. ... 1) $1\text{h} \mathrel{\hat{=}} 3600\,\text{s}$ $\quad f(t) = \overbrace{3600}^{=a} t$, $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

  2) x Grad $\mathrel{\hat{=}}$ $x \cdot \frac{2\pi}{360}$ Bogenmaß $\quad f(x) = x \cdot \underbrace{\frac{2\pi}{360}}_{=a}$

- Physikalische Gesetze, z.B. Ohmsches Gesetz, Hookesches Gesetz

  Einschub 2.1.8. ...

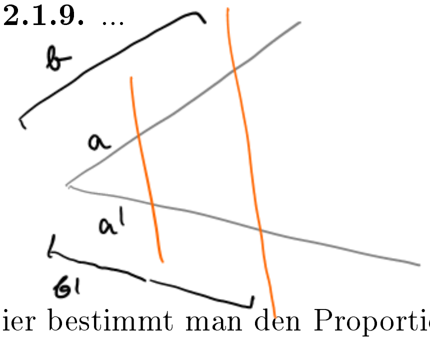
  $F = D \cdot \Delta X$ $\quad F(\Delta X) = D \cdot \Delta X$

  Kraft Federkonstante „a"

- Strahlensätze in Geometrie

Einschub 2.1.9. ...

$\boxed{1}$



$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{(Strahlensatz)}$$

$$\Rightarrow b = \frac{b'}{a'} \cdot a$$

$$f(a) = \frac{b'}{a'} \cdot a \qquad \text{Proportionalitätsfaktor}$$

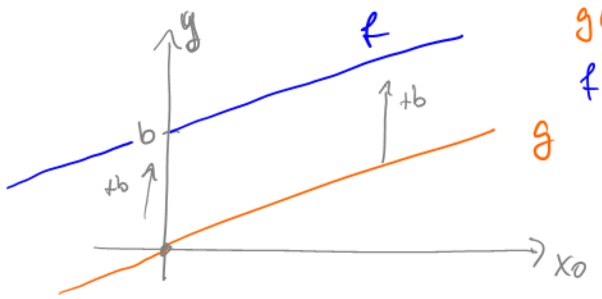
- Dreisatz (hier bestimmt man den Proportionalitätsfaktor häufig über den sogenannten *Schluss über die Eins.*)

$\boxed{2}$ siehe letzte Seite

2.2 Allgemeine lineare Funktionen

Die allgemeine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ ergibt sich aus der zugehörigen proportionalen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ durch Addition der Konstanten b, d.h. geometrisch, dass der Graph von f die um b Einheiten in y-Achsenrichtung verschobene Ursprungsgerade ist, die durch den Graphen von g gegeben ist. Man sagt, dass der Graph von f eine Gerade mit *Steigung* a und *y-Achsenabschnitt* b ist. Der Graph von f wird auch kurz mit der *Geradengleichung* $y = ax + b$ beschrieben.

Einschub 2.2.1. ...



$g(x) = ax$

$f(x) = g(x) + b = ax + b$

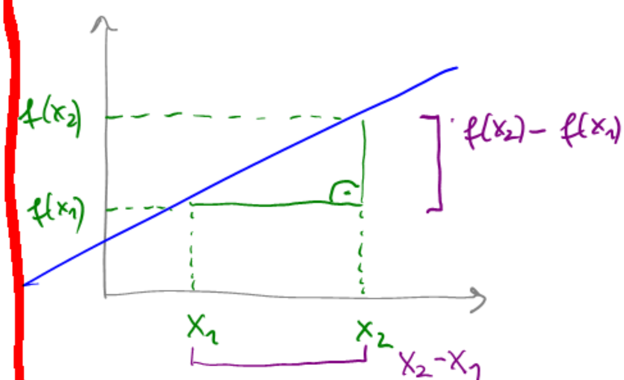
Graph von f ergibt sich aus Graph von g durch "Verschieben" um b Einheiten in y-Richtung "nach oben".

$f(0) = b$ heißt y-Achsenabschnitt von f (*)

Die wesentliche Eigenschaft von linearen Funktionen ist, dass für das *Steigungsdreieck* gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a,$$

Einschub 2.2.2. ...

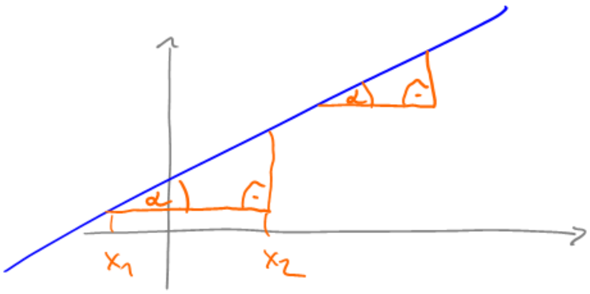


Dfn f : $f(x) = ax + b$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

d.h. unabhängig von der Wahl der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ ergibt der Quotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, der die Änderung der Funktionswerte („Änderung in vertikaler Richtung") ins Verhältnis zu der Änderung der Argumente („Änderung in horizontaler Richtung") setzt, die Steigung a der linearen Funktion f (bzw. der Geraden zu $y = ax + b$). Geometrisch bedeutet dies, dass verschiedene Steigungsdreiecke an den Graphen von f ähnlich sind, d.h. dass sie insbesondere dieselben Winkel besitzen.

Einschub 2.2.3. ...



$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$

Taschenrechner $\quad \alpha = \arctan(a)$

Für den Winkel α der Geraden gegenüber der Parallelen zur x-Achse gilt in jedem Steigungsdreieck

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan a.$$ [1]

2.3 Geradengleichungen zu linearen Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

- Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b:

$$y = ax + b$$

- Gerade mit Steiung a durch den Punkt (x_0, y_0):

$$y = a(x - x_0) + y_0 = ax + (y_0 - ax_0) \qquad \text{(Punkt-Steigungs-Form)}$$

Einschub 2.3.1. ...

[1] Für den Tangens eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}.$$

Mit arctan wird die Umkehrfunktion der Tangensfunktion bezeichnet.

- Gerade durch zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \quad = \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1 \qquad\qquad \text{(Zwei-Punkte-Form)} \end{aligned}$$

Einschub 2.3.2. ...

2.4 Anwendung: Lineare Interpolation

Gegeben eine (beliebige) Funktion $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, deren Werte an den Randstellen x_1 und x_2 bekannt sind (und deren sonstige Werte nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmt werden können).

Einschub 2.4.1. ...

(*) Eine allgemeine lineare Funktion ist nicht linear, denn Beispiel:

$f(x) = 2x + 1$, $\quad f(4+6) = f(10) = 2 \cdot 10 + 1 = 21 \neq$

$f(4) + f(6) = 2 \cdot 4 + 1 + 2 \cdot 6 + 1 = 9 + 13 = 22$

Zur Bestimmung von Näherungswerten für die Funktionswerte von f auf (x_1, x_2) wird der Graph von f durch eine Gerade g ersetzt, die an den Randstellen von $[x_1, x_2]$ mit f übereinstimmt, d.h. gesucht ist $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ linear mit $g(x_1) = f(x_1)$ und $g(x_2) = f(x_2)$. Die Zwei-Punkte-Form liefert

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Für hinreichend „gutartige" Funktionen f gilt dann $f(x) \approx g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$.

2.1.9. $\boxed{2}$ Dreisatz 3kg Zwiebel kosten 4,5 €. Wieviel kosten 5kg?

	3	4,5
$:3$	$\downarrow$	$\downarrow$
	1	$4{,}5/3$
$\cdot 5$	$\downarrow$	$\cdot 5 \downarrow$
	5	$4{,}5/3 \cdot 5$

Annahme Preis ist proportional zum Gewicht

Mit Formel $P(z) = a \cdot z \overset{\text{Folg.}}{=} \frac{P(3)}{3} \cdot z = \frac{4{,}5}{3} \cdot z$

$= 1{,}5 \cdot z$

Einschub 2.2.3. ...

Für den Winkel α der Geraden gegenüber der Parallelen zur x-Achse gilt in jedem Steigungsdreieck

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan a.$$ [1]

2.3 Geradengleichungen zu linearen Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

- Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b:

$$y = ax + b \quad = f(x)$$

- Gerade mit Steiung a durch den Punkt (x_0, y_0):

$$y = a(x - x_0) + y_0 = ax + \overbrace{(y_0 - ax_0)}^{= b'} \qquad \text{(Punkt-Steigungs-Form)}$$

Einschub 2.3.1. ... Gegeben ist (x_0,y_0) und Steigung a. Also gilt $y_0 = a x_0 + b$ durch Einsetzen von (x_0,y_0) in Geradengleichung. Damit: $b = y_0 - a x_0$. Einsetzen in $y = ax + b$ liefert:

$$y = ax + y_0 - a x_0 = a(x - x_0) + y_0$$

[1] Für den Tangens eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}.$$

Mit arctan wird die Umkehrfunktion der Tangensfunktion bezeichnet.

- Gerade durch zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

Steigung y-Achsenabschnitt

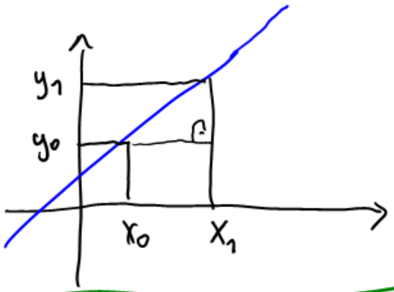
$$f(x) = y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \overset{?}{=} \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{Steigung}} x + \underbrace{\frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}}_{\text{y-Achsenabschnitt}}$$

aus erster Formel durch Rollentausch $(x_0,y_0) \Leftrightarrow (x_1,y_1)$

$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1$$

(Zwei-Punkte-Form)

Einschub 2.3.2. ...



Berechne Steigung a aus „Steigungsdreieck":

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 =$$

(Punkt-Steigungsform s. oben)

$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x \left(- \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) x_0 + y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{-(y_1 - y_0) x_0 + y_0 (x_1 - x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{-y_1 x_0 + \overbrace{y_0 x_0 + y_0 x_1 - y_0 x_0}^{=0}}{x_1 - x_0} \quad \square$$

ausgelassen

2.4 Anwendung: Lineare Interpolation

Gegeben eine (beliebige) Funktion $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, deren Werte an den Randstellen x_1 und x_2 bekannt sind (und deren sonstige Werte nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmt werden können).

Einschub 2.4.1. ...

Zur Bestimmung von Näherungswerten für die Funktionswerte von f auf (x_1, x_2) wird der Graph von f durch eine Gerade g ersetzt, die an den Randstellen von $[x_1, x_2]$ mit f übereinstimmt, d.h. gesucht ist $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ linear mit $g(x_1) = f(x_1)$ und $g(x_2) = f(x_2)$. Die Zwei-Punkte-Form liefert

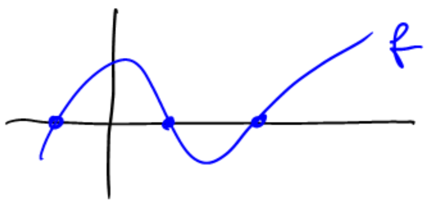
$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Für hinreichend „gutartige" Funktionen f gilt dann $f(x) \approx g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$.

2.5 Nullstellen

Definition 2.5.1. Eine Stelle x_0 in der Definitionsmenge einer Funktion f heißt *Nullstelle* von f, falls $f(x_0) = 0$ gilt.

Einschub 2.5.2. ...



Bei linearen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$$

unterscheiden wir die Fälle:

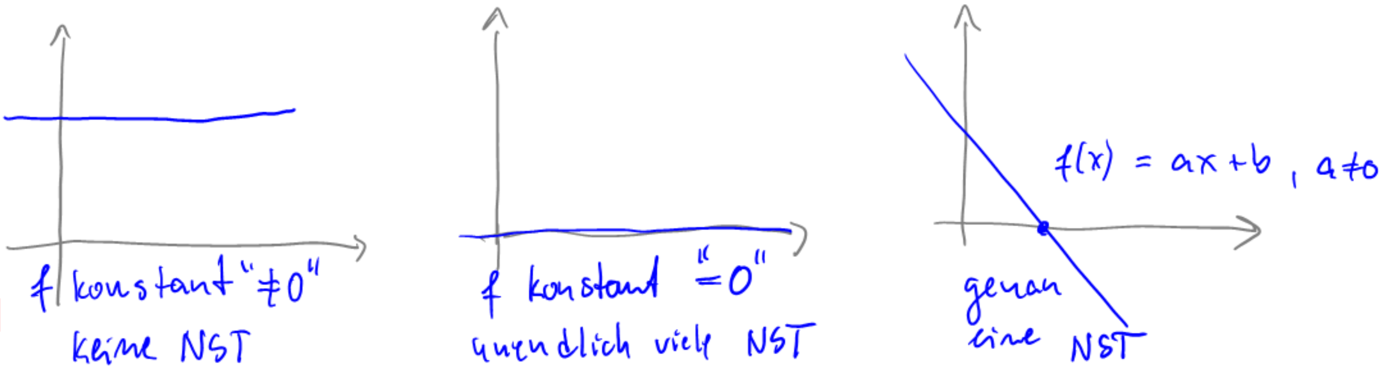
1. Fall: $a = 0$:
Die konstante Funktion f mit $f(x) = b$ besitzt keine Nullstelle, wenn $b \neq 0$. Falls $b = 0$, also f die *Nullfunktion* ist, ist jede Stelle der Definitionsmenge eine Nullstelle.

2. Fall: $a \neq 0$:
Für eine Nullstelle x_0 von f gilt:

$$f(x_0) = 0 \text{ , also } \quad \underline{ax_0 + b} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{a},$$

d.h. es gibt genau eine Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{a}$ von f .

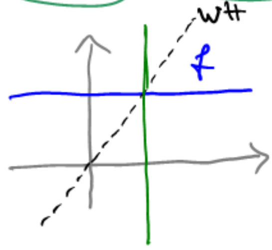
Einschub 2.5.3. ...



2.6 Umkehrfunktion

Es sei f eine lineare Funktion. Wir unterscheiden die folgenden Fälle: $f(x) = ax + b$

1. Fall: $a = 0$:
Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = b$ ist eine Parallele zur x-Achse. Der Graph der Umkehrrelation entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden, ist daher eine Gerade parallel zur y-Achse und somit keine Funktion. Folglich besitzt f in diesem Fall keine Umkehrfunktion.



2. Fall: $a \neq 0$:
Löst man die Geradengleichung $y = ax + b$ nach x auf, so erhält man

$$y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \Leftrightarrow \frac{y-b}{a} = x$$

$$x = \frac{y - b}{a} = \boxed{\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}. = f^{-1}(y)}$$

Die Umkehrrelation von f ist also eine Funktion, nämlich die lineare Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \boxed{y \mapsto \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.}$$

Einschub 2.6.1. ... $f(x) = \underbrace{-4}_{=a}x + \underbrace{16}_{=b}$, $y = -4x + 16 \Leftrightarrow y - 16 = -4x$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-16}{-4} = -\frac{1}{4}y + 4$ Nun Variablen tauschen, liefert:

$y = -\frac{1}{4}x + 4$ also $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 4$

oder mit $\boxed{\text{Formel}}$ ablesen: $f^{-1}(y) = \frac{1}{-4}y - \frac{16}{-4} = -\frac{1}{4}y + 4$

2.7 Monotonie

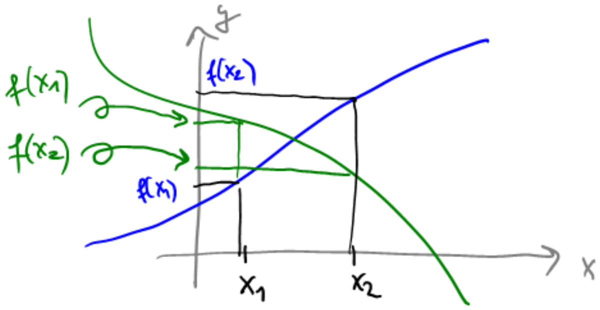
Definition 2.7.1 (Monotonie)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*), falls

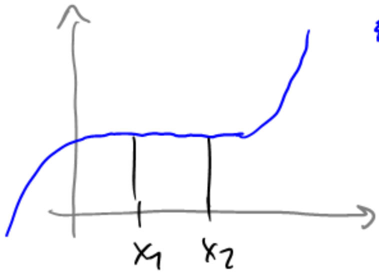
$$\text{für alle} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt:} \quad f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2)).$$

Sie heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*), falls

$$\text{für alle} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt:} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (\text{bzw.} \quad f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Einschub 2.7.2. ...





monoton wachsend
aber nicht streng
monoton wachsend

denn hier $f(x_1) = f(x_2)$

Folgerung 2.7.3. *Für eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ gilt:*

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad f \textit{ ist streng monoton wachsend}$$
$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad f \textit{ ist streng monoton fallend}$$

Einschub 2.7.4. ... Beispiel $f(x) = 2x - 5$, $a = 2 > 0$ Beh: f streng monoton wachsend. Bew: Seien dazu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist: $f(x_1) < f(x_2)$. Also $f(x_1) = 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5 = f(x_2)$

$\Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2$

$\Leftrightarrow x_1 < x_2$

„Schmierzettel"

Also gezeigt: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$

$\Rightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ □

Also allgemein Beh: $a < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend

Bew: Sei $x_1 < x_2$. Zu zeigen: $f(x_1) > f(x_2)$. Also: $x_1 < x_2$

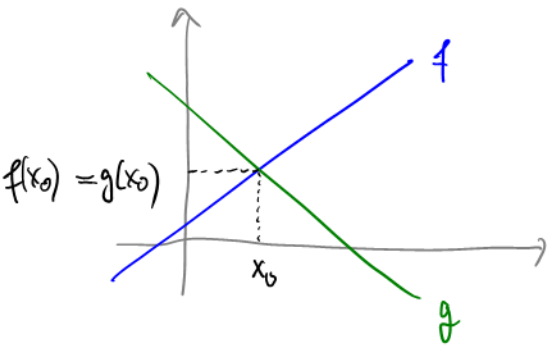
$\overset{a<0}{\Rightarrow} a x_1 > a x_2 \Rightarrow a x_1 + b > a x_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ □

man muss gemeinsame
Punkte bestimmen können

2.8 Gemeinsame Punkte von Geraden.

Seien f und g lineare Funktionen mit $f(x) = ax + b$ und $g(x) = a'x + b'$. Zur Bestimmung gemeinsamer Punkte der zugehörigen Graphen suchen wir alle Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$. Dazu suchen wir Nullstellen der Funktion $h := f - g$, d.h. der Funktion mit $h(x) = f(x) - g(x)$, denn es gilt $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow (f - g)(x_0) = 0$.

Einschub 2.8.1. ... Gesucht sind $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$. Definiere Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - g(x)$. Dann hat man: x_0 gesuchte gemeinsame Stelle von f und $g \Leftrightarrow h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0$ ist NST von h



h berechnen: $h(x) = ax + b - (a'x + b')$

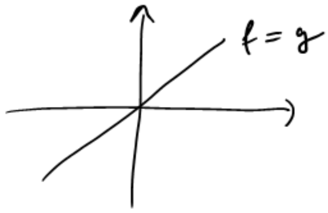
$= \underbrace{(a - a')}_{= A} x + \underbrace{(b - b')}_{= B}$

⇝ also ist h lineare Funktion

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $h = f - g$ ist die Nullfunktion, d.h. f=g:
Die beiden Geraden stimmen überein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

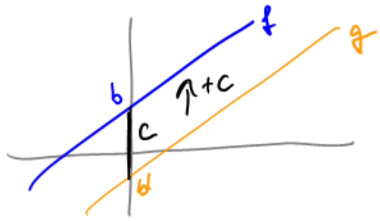
Einschub 2.8.2. ... $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = h(x) = f(x) - g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x)$. Also ∞-viele gemeinsame Punkte



2. Fall: $h = f - g$ ist konstant, aber nicht die Nullfunktion:
In diesem Fall exisitiert ein $c \neq 0$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = a'$ und $b \neq b'$. Hier gibt es keinen Schnittpunkt, da $f - g$ als konstante Funktion ungleich Null keine Nullstelle hat. Die zugehörigen Geraden sind also parallel.

Einschub 2.8.3. ... Für alle $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = c \neq 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = c$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + c \Leftrightarrow ax + b = a'x + b' + c \Leftrightarrow (a - a')x =$
$= b' - b + c$ für alle $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = a'$ und $b = b' + c$



3. Fall: $h = f - g$ ist nicht konstant:
Da $f - g$ offensichtlich wieder eine lineare Funktion ist (mit $h(x) = (a - a')x + (b - b')$), gibt es dann genau eine Nullstelle x_0 von $h = f - g$, d.h. genau einen Schnittpunkt von f und g, nämlich

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0)) = \left(-\frac{b - b'}{a - a'}, -\frac{b - b'}{a - a'} a + b \right).$$

Einschub 2.8.4. … h ist nicht konstant, daher gibt es genau eine NST von h, nämlich: $x_0 = -\frac{B}{A} =$ ($A \neq 0$, denn h nicht konstant)

$$= -\frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b'-b}{a-a'} \quad \text{und} \quad f(x_0) = a\cdot\frac{b'-b}{a-a'} + b = g(x_0)$$

$$= a'\frac{b'-b}{a-a'} + b'.$$

Daher: $(x_0, f(x_0))$ ist gesuchter Schnittpunkt

<u>Beispiel</u> $f_1(x) = -2x+3$, $f_2(x) = -2x$, $f_3(x) = x-1$
$= a_1x+b_1$, $= a_2x+b_2$, $= a_3x+b_3$

$a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2 \Rightarrow f_2$ parallel zu f_1

$a_2 \neq a_3 \Rightarrow$ genau ein Schnittpunkt $x_0 = \frac{b_3-b_2}{a_2-a_3} = \frac{-1-0}{-2-1} = \frac{1}{3}$

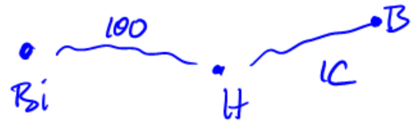
und $f_2(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$ also $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ist Schnittpunkt

<u>Direkt</u> $f_2(x_0) = f_3(x_0) \Leftrightarrow -2x_0 = x_0 - 1 \Leftrightarrow 3x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3}$

Anwendungsbeispiel

Die Städte Bielefeld und Hannover sind ca. 100 km voneinander entfernt. Ein IC fährt von Hannover nach Berlin mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h. Gleichzeitig startet in Bielefeld ein ICE, der über Hannover nach Berlin mit einer einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 130 km/h fährt. Offensichtlich holt der ICE den IC irgendwann ein. Den Zeitpunkt t_0 und den Ort s_0 (angegeben als Entfernung von Bielefeld) des Einholens bestimmt man wie folgt: Für die Weg-Zeit-Gesetze s_{IC} und s_{ICE} der beiden Züge gilt: $s_{\text{IC}}(t) = 80t + 100$ und $s_{\text{ICE}}(t) = 130t$. Entsprechend ist t_0 gegeben durch $s_{\text{IC}}(t_0) = s_{\text{ICE}}(t_0)$, d.h. $t_0 = 2$ und somit $s_0 = s_{\text{ICE}}(t_0) = 260$.

↯



Einschub 2.8.5. …

$s_{IC}(t) = 100 + 90t$, $s_{ICE}(t) = 130t + 0$

$\Rightarrow t_0 = \frac{100-0}{130-90} = \frac{100}{40} = 2{,}5$ <u>also</u> Treffpunkt nach 2,5 h

am Ort $s_{ICE}(2{,}5) = 130\cdot 2{,}5 = 260 + 65 = 325.$

<u>Frage</u> wie weit ist es von Bi nach B?

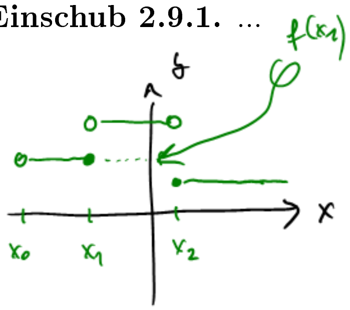
2.9 Stückweise lineare Funktionen

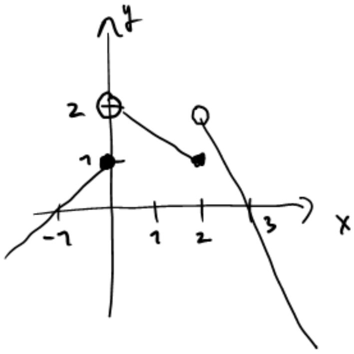
Eine Funktion f kann *abschnittsweise* definiert sein. In diesem Fall gibt es eine Zerlegung des Definitionsbereichs in paarweise disjunkte Teilmengen $I_1, I_2, \ldots$ (d.h. $I_m \cap I_n = \emptyset$, falls $m \neq n$) und Funktionen $f_n : I_n \to \mathbb{R}, n \geq 1$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x \in I_1, \\ f_2(x), & \text{falls } x \in I_2, \\ f_3(x), & \text{falls } x \in I_3, \\ & \vdots \end{cases}$$

b aus Punkt-Steigungs-Form berechnen: $y = ax + y_0 - ax_0$
$= -2x + 0 - (-2) \cdot 3 =$
$= -2x + 6$
$(x_0, y_0) = (3, 0)$ Punkt von Graph f

Einschub 2.9.1. ...





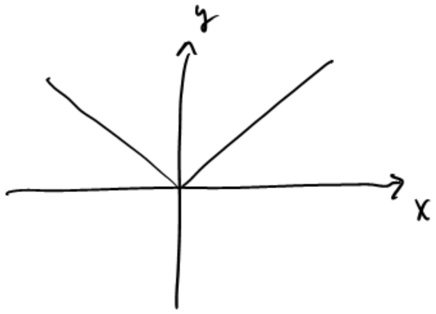
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & : 0 < x \leq 2 \\ -2x + b & : 2 < x \end{cases}$$

$b = 6$

Sind für $n \geq 1$ die Zerlegungsmengen I_n Intervalle und die Funktionen $f_n : I_n \to \mathbb{R}$ linear (bzw. konstant), so heißt f *stückweise linear* (bzw. *stückweise konstant*). Stückweise konstante Funktionen heißen auch *Treppenfunktionen*. Stückweise lineare (bzw. konstante) Funktionen kommen bei der Modellierung von funktionalen Zusammenhängen häufiger vor, z.B. bei der Beschreibung von Mietverträgen mit Grundgebühr und Freikilometern oder von Telefongebühren bei Abrechnung je angefangener Minute.
Weitere Beispiele für stückweise lineare Funktionen sind die *Betragsfunktion*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

Einschub 2.9.2. ...

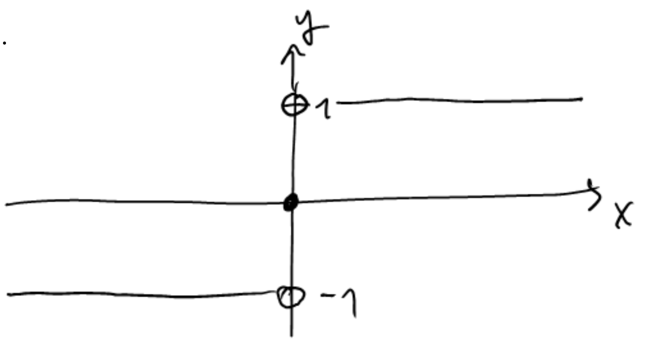


und die *Vorzeichenfunktion*

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Signum-Funktion
≙
"Vorzeichen"-Funktion

Einschub 2.9.3. ...



$\text{sign}(-7) = -1$

$\text{sign}(0) = 0$

2.10 Lineares Skalieren

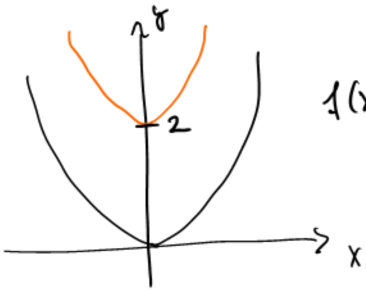
Verschieben, Vergrößern oder Verkleinern des Graphen einer Funktion f in x- oder y-Achsenrichtung bewirken zwar quantitative Veränderungen, qualitative Eigenschafen des Graphen bleiben im Wesentlichen aber erhalten. D.h. bei der Modellierung von funktionalen Zusammenhängen können diese Manipulationen des Graphen zur Anpassung an die Anwendungssituation genutzt werden, ohne dass die qualitativen Eigenschaften des gewählten, beschreibenden Funktiontyps verloren gehen. Die genannten Modifikationen erhält man durch *lineares Skalieren* und zwar in der folgenden Weise:

Vertikales Verschieben. Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(x) + b \quad =: g(x)$$

für eine Konstante b bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f um b Einheiten, und zwar nach oben (in y-Richtung), falls $b > 0$ und nach unten, falls $b < 0$ ist.

Einschub 2.10.1. ...



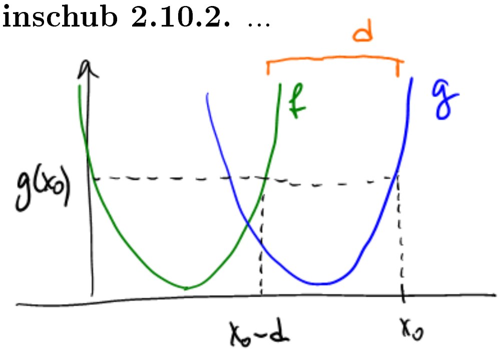
$f(x) = x^2$, $g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$

Horizontales Verschieben. Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(x-d) \text{ für eine Konstante } d$$

bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f um d Einheiten, und zwar nach rechts (in x-Richtung), falls $d > 0$ und nach links, falls $d < 0$ ist.

Einschub 2.10.2. ...



Der Wert von g an der Stelle x_0 entspricht dem Wert von f an der Stelle $x_0 - d$, also

$g(x) = f(x-d)$ Beispiel $f(x) = x^2$, $d = 2$,

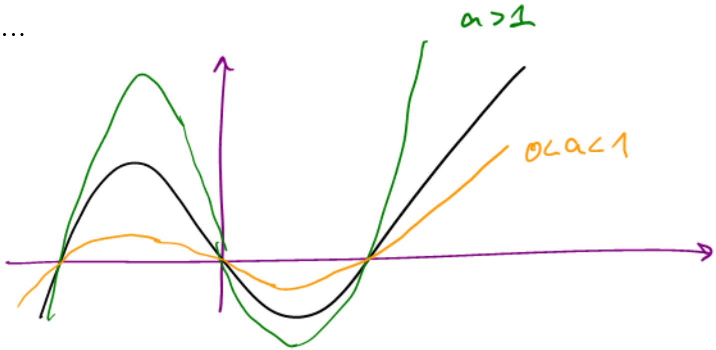
verschieben von f um 2 Einh. nach rechts: $g(x) = f(x-2)$
$= (x-2)^2$

Vertikales Strecken oder Stauchen (Änderung der Amplitude). Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } a \cdot f(x)$$

für eine Konstante $a \neq 0$ bewirkt eine Streckung des Graphen in y-Richtung, falls $a > 1$, eine Stauchung des Graphen in y-Richtung, falls $0 < a < 1$ und, falls $a < 0$, eine Streckung oder Stauchung in y-Richtung um den Faktor $|a|$ bei gleichzeitiger Spiegelung des Graphen an der x-Achse.

Einschub 2.10.3. ...

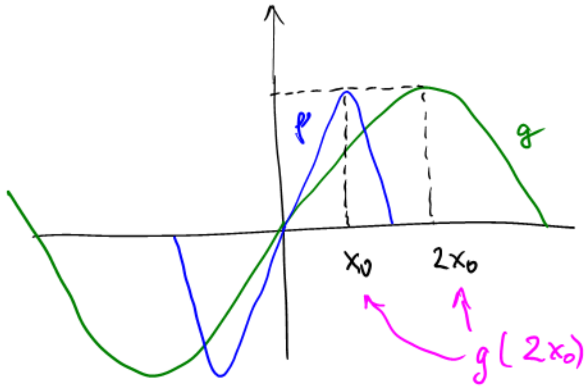


Horizontales Strecken oder Stauchen (Änderung der Frequenz). Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(c \cdot x)$$

für eine Konstante $c \neq 0$ bewirkt eine Stauchung des Graphen in x-Richtung, falls $c > 1$, eine Streckung des Graphen in x-Richtung, falls $0 < c < 1$ und, falls $c < 0$, eine Streckung oder Stauchung in x-Richtung um den Faktor $|c|$ bei gleichzeitiger Spiegelung des Graphen an der y-Achse.

Einschub 2.10.4. ...



Ersetzen von $f(x)$ durch

$f(\frac{1}{2}x) \rightsquigarrow$ Streckung von f

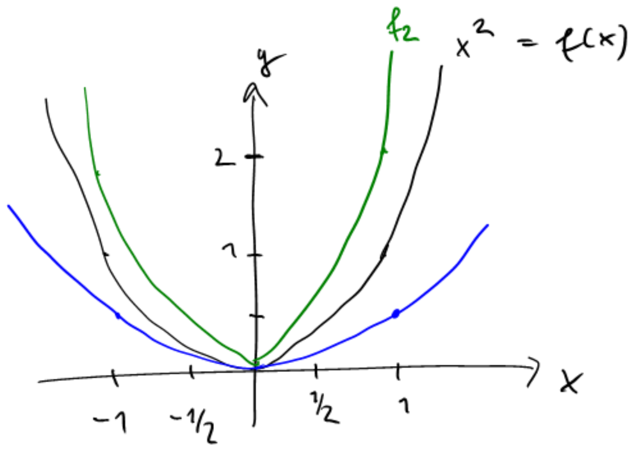
mit Faktor $\frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow g(x) = f(\frac{1}{2}x)$

$g(2x_0) = f(\frac{1}{2} \cdot 2x_0) = f(x_0)$

Bei der Normalparabel, dem Graphen zu $x \mapsto x^2$, bewirkt die horizontale Streckung oder Stauchung um $c > 0$ denselben Effekt wie das vertikale Strecken oder Stauchen um den Faktor c^2. Daher kann man die Unterschiede der Amplituden- und Frequenzänderung bei dieser Funktion nicht gut studieren. Hier sind periodische Funktionen, wie z.B. die Sinusfunktion, besser geeignet.

Einschub 2.10.5. ...



$f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

Stauchung mit $c = 2$ von f_1

$f_2(x) = f_1(2x)$

$= \frac{1}{2} \cdot 4x^2 = 2x^2$

$= 4 \cdot f_1(x)$

f_2 geht aus f_1 durch horizontales Stauchen mit Faktor 2 hervor

f_2 geht aus f_1 durch vertikales Strecken mit Faktor 4 hervor

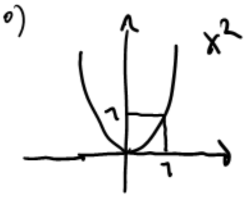
Diese vier Operationen lassen sich zu einer allgemeinen linearen Umskalierung zusammenfassen. So bewirkt die Ersetzung von

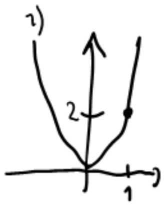
$$f(x) \qquad \text{durch} \qquad a \cdot f\,(c \cdot (x-d)) + b$$

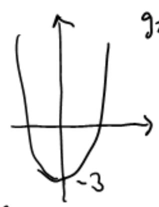
- eine Streckung oder Stauchung des Graphen von f in x-Richtung um den Faktor c
- eine Streckung oder Stauchung des Graphen von f in y-Richtung um den Faktor a
- eine Verschiebung des Graphen um d Einheiten in x-Richtung und b Einheiten in y-Richtung.

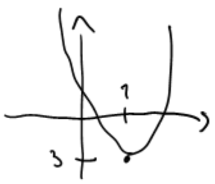
Es ist hierbei zu beachten, dass die Reihenfolge der vorgenommenen Operationen wesentlich ist, d.h. vertauscht man die Rihenfolge der Manipulationen, so kann das zu unterschiedlichen Funktionen führen, wie z.B. beim Vertauschen von Verschieben und Strecken/Stauchen.

Einschub 2.10.6. ...

0)  $x^2 = g(x)$

1)  $g_1(x) = 2x^2$

2)  $g_2(x) = 2x^2 - 3$

3) 

$$g_3(x) = 2(x-1)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 3$$
$$= 2x^2 - 4x + 2 - 3 = 2x^2 - 4x - 1$$

Beispiele 2.10.7. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$ und die folgenden Manipulationen des Funktionsgraphen:

1. Verschiebung um 3 Einheiten in x-Richtung
2. Verschiebung um 4 Einheiten entgegen der y-Richtung
3. Vertikale Streckung um den Faktor 2 und Spiegelung an der $\overset{y}{\cancel{x}}$-Achse

Führt man die Manipulationen in der Reihenfolge 1 - 2 - 3 durch, so erhält man die Funktion g_1 mit

$$g_1(x) = -2\left((x-3)^2 - 4\right) = -2x^2 + 12x - 10.$$

Führt man die Manipulationen in der Reihenfolge 3 - 2 - 1 durch, so erhält man die Funktion g_2 mit

$$g_2(x) = -2(x-3)^2 - 4 = -2x^2 + 12x - 22 \neq g_1(x).$$

Kapitel 3

Quadratische Funktionen

Definition 3.0.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *quadratische Funktion*, wenn es reelle Zahlen a, b und c gibt mit $a \neq 0$, so dass gilt:

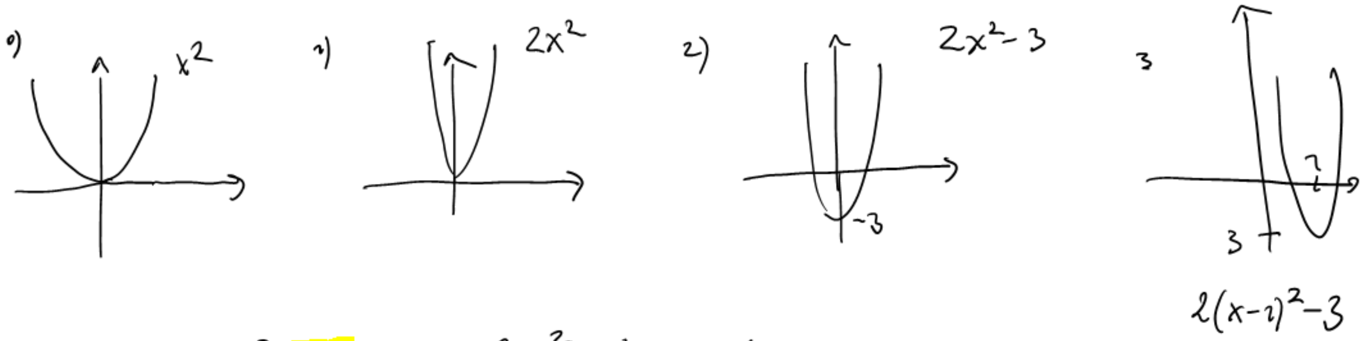
$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.0.2. Im Spezialfall $a = 1, b = c = 0$ erhält man $f(x) = x^2$. Der zugehörige Graph zu dieser Funktion heißt *Normalparabel*. Der Punkt $(0, 0)$ ist der *Scheitelpunkt* der Normalparabel.
Mit quadratischer Ergänzung zeigt man, dass

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

gilt.

Einschub 3.0.3. ...



$$g(x) = 2(x-1)^2 - 3 = \underbrace{2}_{=a}x^2 \underbrace{-4}_{=b}x \underbrace{-1}_{=c}$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-4}{4} = -1 \quad , \quad c - \frac{b^2}{4a} = -1 - \frac{(-4)^2}{8} = -1 - 2 = -3$$

Einschub 3.04 Methode Quadratische Ergänzung

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 5 = ax^2 + bx + c$$

1) Vorfaktor von x^2 ausklammern

$$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) \qquad \Bigg\| \qquad f(x) = \underset{a \neq 0}{a}\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

2) Binomische Formel anwenden:

~~**Einschub 3.0.4.**~~ ...

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ba + b^2$$

x^2, $2b = 3/2$, x

$$\rightsquigarrow b = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = 2\left(x^2 + \tfrac{3}{2}x + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{5}{2}\right)$$

$$f(x) = 2\left(\left(x + \tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(3/4\right)^2 + \tfrac{5}{2}\right)$$

$$= 2\left((x+3/4)^2 - \tfrac{9}{16} + \tfrac{40}{16}\right)$$

$$= 2(x+3/4)^2 + \tfrac{31}{8}$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \tfrac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion geht also aus der Normalparabel durch lineares Skalieren hervor, nämlich durch

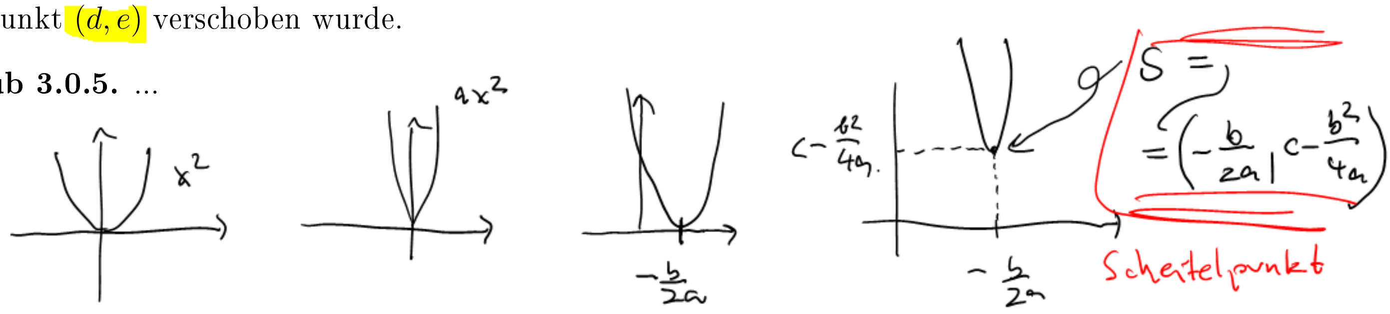
- Streckung der Normalparabel in y-Richtung um den Faktor a und
- Verschiebung der gestreckten Parabel in horizontaler Richtung um $-\frac{b}{2a}$ und
- in vertikaler Richtung um $-\frac{b^2}{4a} + c$.

Die Darstellung der Funktion wie auf der rechten Seite der obigen Gleichung, also in der Form

$$\boxed{f(x) = a(x-d)^2 + e} \qquad d := -\frac{b}{2a}, \quad e := c - \frac{b^2}{4a}$$

heißt *Scheitelpunktsform*. An der Scheitelpunktsform von f kann man Gestalt und Lage des Graphen zu f sofort ablesen: Es handelt sich um eine um den Faktor a gestreckte Normalparabel, deren Scheitelpunkt in den Punkt (d,e) verschoben wurde.

Einschub 3.0.5. ...



3.1 Nullstellen

Die Suche nach **Nullstellen** quadratischer Funktionen führt sofort auf *quadratische Gleichungen*, also Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Eine allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c' = d$ lässt sich durch Subtraktion von d in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ überführen.

Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir zunächst die (rein) quadratische Gleichung

$$x^2 = r$$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \lor x = -3$

Ist $r > 0$, so besitzt diese Gleichung zwei Lösungen. Die positive Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt{r}$. Der Nachweis der Existenz folgt später. Die Tatsache, dass es genau zwei Lösungen gibt, folgt mithilfe der 3. Binomischen Formel:

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$x^2 = r \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \sqrt{r}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r}) = 0$$

d.h. $(\sqrt{r})^2 = r$

Da ein Produkt reeller Zahlen genau dann Null ist, wenn einer der beiden Faktoren Null ist, ist dies äquivalent zu

$$x - \sqrt{r} = 0 \quad \text{oder} \quad x + \sqrt{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{r} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{r},$$

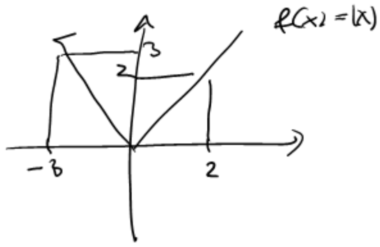
d.h. die Gleichung $x^2 = r$ besitzt die Lösungen $x = \pm\sqrt{r}$.

Ist $r = 0$, so ist $x = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = 0$. Wir setzen daher $\sqrt{0} = 0$.

Ist $r < 0$, so besitzt die Gleichung $x^2 = r$ keine reelle Lösung, da Quadrate reeller Zahlen immer größer gleich Null sind.

Für $r \geq 0$ gilt also die folgende Äquivalenz:

$$x^2 = r \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{r}.$$



Einschub 3.1.1. ...

Achtung $\sqrt{r^2} = |r|$, $r = 2$: $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |r|$

$r = -2$: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |r|$

$|2| = 2$, $|-3| = 3$

Es gilt $r^2 = s^2 \overset{\sqrt{}}{\Leftrightarrow} |r| = |s| \Leftrightarrow r = s$ oder $r = -s$

Betrachtet man nun die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

so kann diese durch quadratisches Ergänzen äquivalent in Scheitelpunktsform überführt werden:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)}_{} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a} - c\right).$$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow}$

"$(...)^2 = r$"

Diese Gleichung hat nach den vorangehenden Überlegungen zu rein quadratischen Gleichungen – hier für den Ausdruck $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ – genau die Lösungen

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

? bleibt auszurechnen

Einschub 3.1.2. ... $\pm\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$

Satz 3.1.3. *Die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ besitzt*

- *für $b^2-4ac>0$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \textit{und} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

- *für $b^2-4ac=0$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x=\frac{-b}{2a}$,*
- *für $b^2-4ac<0$ keine reelle Lösung.*

Die Größe

$$D := b^2-4ac,$$

die über die Anzahl reeller Lösungen einer quadratischen Gleichung entscheidet, heißt Diskriminante *der Gleichung.*

Einschub 3.1.4. ...

Ist die Gleichung *normiert*, d.h. gilt $a=1$, so liefert der Satz die sogenannte *p-q-Formel*:

Folgerung 3.1.5. *Die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ besitzt*

- *für $p^2>-4q$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.*

  Einschub 3.1.6. ...

Einschub 3.1.2. … $= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

$a=-3$: $\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$

$\sqrt{3^2} = 3 = |3|$, $a=3$

$$= \begin{cases} a>0 & -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right) \\ a<0 & -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1}{2a}\left(-b \mp \sqrt{b^2-4ac}\right) \end{cases}$$

$\square$

$$|a| = \begin{cases} a & : a \geq 0 \\ -a & : a < 0 \end{cases}$$

Satz 3.1.3. *Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ besitzt*

- *für $b^2 - 4ac > 0$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textit{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

„abc – Formel"

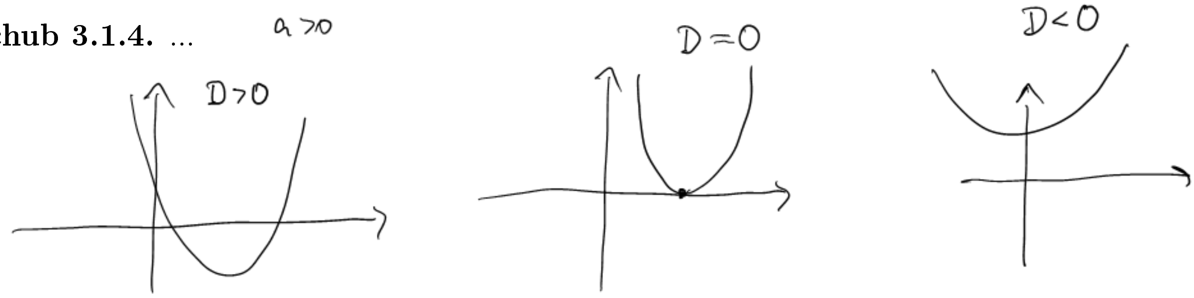
- *für $b^2 - 4ac = 0$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x = \frac{-b}{2a}$,*
- *für $b^2 - 4ac < 0$ keine reelle Lösung.*

Die Größe

$$D := b^2 - 4ac,$$

die über die Anzahl reeller Lösungen einer quadratischen Gleichung entscheidet, heißt Diskriminante *der Gleichung.*

Einschub 3.1.4. …



Ist die Gleichung *normiert*, d.h. gilt $a = 1$, so liefert der Satz die sogenannte *p-q-Formel*:

(lässt sich immer erreichen in dem man durch a ($a \neq 0$) teilt)

Folgerung 3.1.5. *Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt*

- *für $p^2 > -4q$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.*

Einschub 3.1.6. … $x^2 + px + q = 0$, $a=1$, $b=p$, $c=q$

„abcF"

$$x = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right) = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$\sqrt{\frac{1}{4}(\ldots)}$

- für $p^2 = 4q$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x = -\frac{p}{2}$,
- für $p^2 < 4q$ keine reelle Lösung.

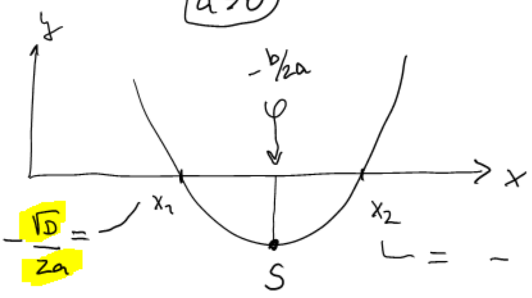
Bemerkung 3.1.7. im Fall einer positiven Diskriminante D, also $D = b^2 - 4ac > 0$ liegen die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

der Parabel symmetrisch zur Scheitelstelle $x = -\frac{b}{2a}$; im Fall $D = 0$ ist der Scheitelpunkt die einzige Nullstelle, d.h. die Parabel berührt die x-Achse.

Einschub 3.1.8. ...

$a > 0$



$S = \left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a} \right)$

$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = x_1$

$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$

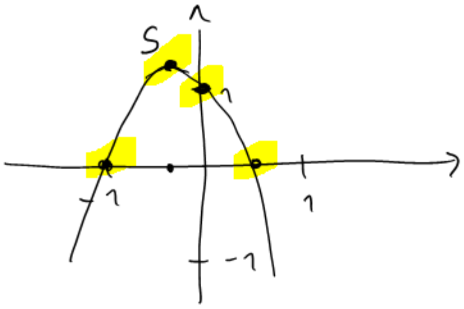
$= \frac{\sqrt{D}}{2a}$

Beispiel $f(x) = -2x^2 - x + 1$, $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$

$x = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = \frac{1}{-4}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)1}\right) = -\frac{1}{4}(1 \pm 3)$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{4}{4} = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $D = b^2 - 4ac = 9 > 0$

$S = \left(-\frac{-1}{-4},\ 1 - \frac{1}{-8} \right) = \left(-\frac{1}{4},\ \frac{9}{8}\right)$



$f(0) = 1$

3.2 Linearfaktorzerlegung

$f(x_1) = a\underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0}(x_1 - x_2) = 0$

$f(x_2) = 0$

Zu gegebenen Stellen x_1, x_2 ist mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = \overset{a'}{a}x^2 \overbrace{- a(x_1 + x_2)}^{b'}x + \overbrace{ax_1x_2}^{c'} = a'x^2 + b'x + c'$$

$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2\right) = a\left(x^2 - x(+x_2 + x_1) + x_1x_2\right) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$

für $a \neq 0$ eine quadratische Funktion gegeben, die genau die Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und andersherum hat jede quadratische Funktion mit den Nullstellen x_1 und x_2 diese Gestalt.

Einschub 3.2.1. ... $ax^2+bx+c=f(x)$. Nach abc-Formel sind die NST

$x_1=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D})$, $x_2=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D})$ ① $-a(x_1+x_2)=$

$=-a\left(\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D})+\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D})\right)=-\frac{1}{2}(-b+\sqrt{D})-\frac{1}{2}(-b-\sqrt{D})$

$=\frac{1}{2}(b-\sqrt{D}+b+\sqrt{D})=b$

② $ax_1x_2=a\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D})\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D})=\frac{1}{4a}(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})$

$\overset{3\text{Bin}}{=}\frac{1}{4a}\left((-b)^2-\sqrt{D}^2\right)=\frac{1}{4a}(b^2-D)=\frac{1}{4a}(b^2-(b^2-4ac))$

$=\frac{1}{4a}\cdot 4ac=c$

Für $a=1$, $p=b$ und $q=c$ erhält man den

Satz 3.2.2 (von Vieta)**.** *Besitzt eine normierte quadratische Funktion $f(x)=x^2+px+q$ die Nullstellen x_1 und x_2, so gilt: $-p=x_1+x_2$ und $q=x_1\cdot x_2$.*

Definition 3.2.3. Die Darstellung der Funktion f in der Form $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ heißt *Linearfaktorzerlegung*. Die Faktoren $(x-x_1)$ und $(x-x_2)$ heißen *Linearfaktoren*.

Satz 3.2.4. *Eine quadratische Funktion f mit $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ mit den Nullstellen x_1 und x_2 besitzt die eindeutige Linearfaktorzerlegung*

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Einschub 3.2.5. ..., Bew Bestimme die NST x_1,x_2 von f dann gilt

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ □

Bemerkung 3.2.6. Im Spezialfall $x_1=x_2$ gilt

$$f(x)=a(x-x_1)^2=ax^2+2ax_1\cdot x+ax_1^2,$$

$b=2ax_1$, $c=ax_1^2$

$D=b^2-4ac$

d.h. für die Diskriminante gilt:

$$D=(2ax_1)^2-4a\cdot ax_1^2=0.$$

Folglich hat f genau eine Nullstelle. Im Sinne der Linearfaktorzerlegung handelt es sich eigentlich um zwei Nullstellen, die auf dieselbe Stelle fallen. In diesem Fall spricht man von einer *doppelten Nullstelle* x_1.

Beispiel 3.2.7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$

Scheitelpunktform $f(x) = 2(x^2 - 2x - 15) \overset{\text{qErg}}{=} 2(x^2 - 2x + \overbrace{1 - 1}^{=0} - 15)$

$\overset{2\text{Bin}}{=} 2((x-1)^2 - 1 - 15) = 2(x-1)^2 - 32$

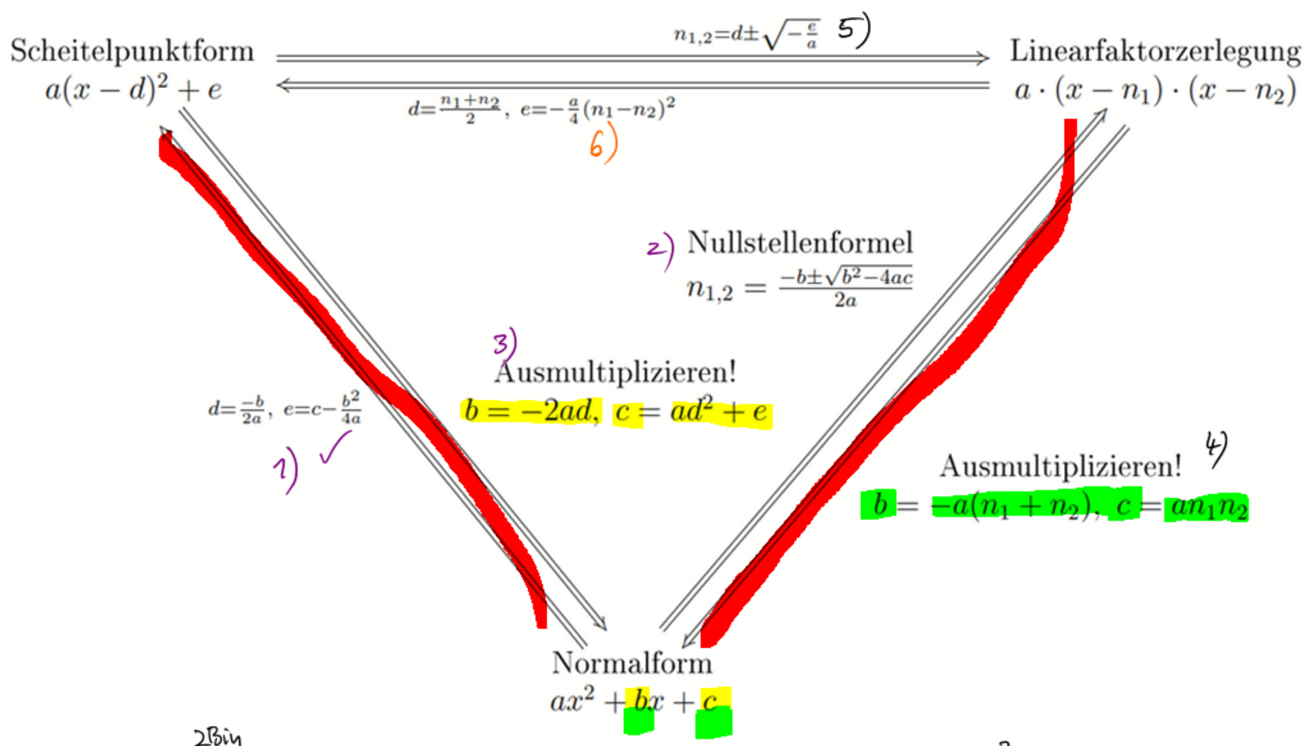
Linearfaktorzerlegung (LFZ) Nullstellen bestimmen, $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \overset{PQF}{\Leftrightarrow}$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 15} \Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{16} = 1 + 4 = 5$

$x_2 = 1 - \sqrt{16} = 1 - 4 = -3$

$\Rightarrow f(x) = 2(x-5)(x+3) \overset{\text{Probe}}{=} \dots = 2x^2 - 4x - 30$



3) $a(x-d)^2 + e \overset{2\text{Bin}}{=} a(x^2 - 2dx + d^2) + e = ax^2 - 2adx + ad^2 + e$

4) $a(x - n_1)(x - n_2) = a(x^2 - xn_2 - xn_1 + n_1n_2) = ax^2 + ax(-n_2 - n_1) + an_1n_2$

5) abc-Formel und 3) ergibt:

$$n_1 = \frac{1}{2a}\left(2ad - \sqrt{4a^2d^2 - 4a(ad^2 + e)}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(2ad - \sqrt{-4ae}\right) = d - \frac{1}{2a}\sqrt{-4ae} = d - \sqrt{\frac{-4ae}{4a^2}}$$

$= d - \sqrt{-\frac{e}{a}}$, analog $n_2 = d + \sqrt{-\frac{e}{a}}$

6) das ist 1) und 4): Übung!

3.3 Minimum oder Maximum einer quadratischen Funktion

Definition 3.3.1. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Stelle $x_0 \in A$ heißt *(globale) Maximalstelle*, falls

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in A \text{ gilt.}$$

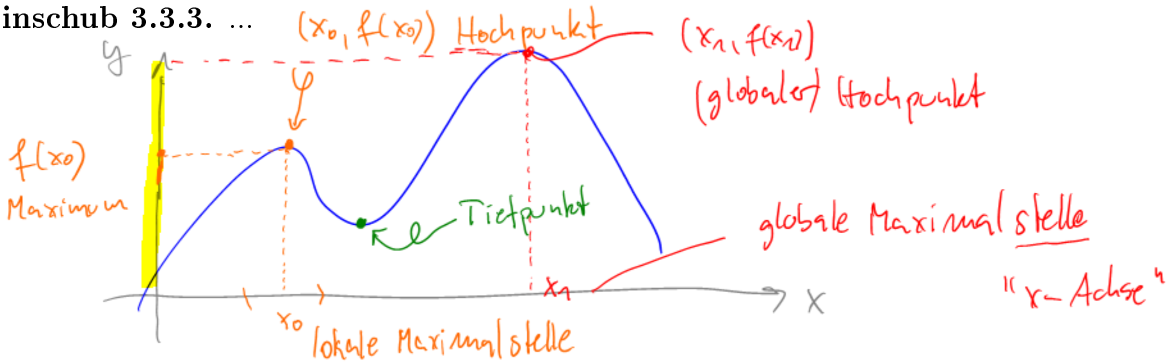
In diesem Fall heißt $f(x_0)$ *(globales) Maximum* und der Punkt $(x_0, f(x_0))$ *(globaler) Hochpunkt*.
Der Punkt $x_0 \in A$ heißt *(globale) Minimalstelle*, falls

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in A$$

gilt. Dann nennt man $f(x_0)$ das *(globale) Minimum* und $(x_0, f(x_0))$ den *(globalen) Tiefpunkt.*

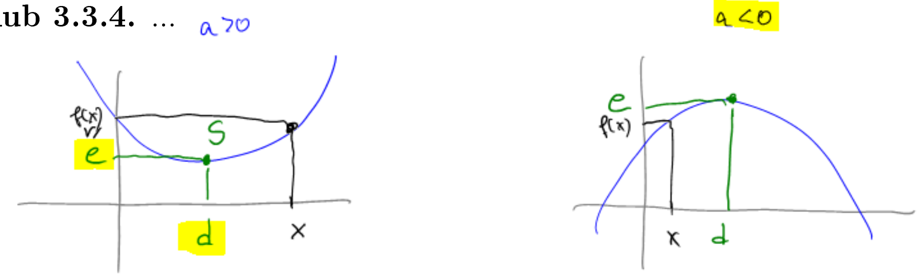
Bemerkung 3.3.2. Gilt die jeweilige Ungleichung nur auf einer Umgebung von x_0 und nicht den ganzen Definitionsbereich A, spricht man von *lokalen* Maximal- und Minimalstellem, Maxima und Minima, Hoch- und Tiefpunkten.

Einschub 3.3.3. ...



Bei quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-d)^2 + e$ gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

Einschub 3.3.4. ...



Ist $a > 0$ so ist die Parabel nach oben geöffnet und die Parabel hat einen Tiefpunkt im Scheitelpunkt (d, e), denn

ZZ $f(x) \geq f(d)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

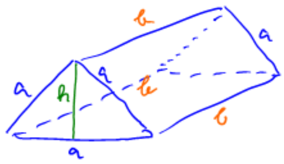
$$f(x) = \underbrace{a}_{>0}\underbrace{(x-d)^2}_{\geq 0} + e \geq e = f(d) \quad \text{für alle } x$$

Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet und die Parabel hat einen Hochpunkt im Scheitelpunkt (d, e), denn

$$f(x) = \underbrace{a}_{<0}\underbrace{(x-d)^2}_{\geq 0} + e \leq e = f(d) \quad \text{für alle } x$$

Somit kann man bei quadratischen Funkitonen ein *Extremum* (d.h. Maximum oder Minimum) bestimmen, indem man den Scheitelpunkt bzw. die Scheitelpunktsform z.B. mit quadratischer Ergänzung bestimmt.

Einschub 3.3.5. ... Betrachte ein Drahtkantenmodell eines Prismas mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche (Seitenlänge a)



Gesamtlänge des Drahtes: 144 cm

1) Bestimme die Oberfläche des Prismas in Abhängigkeit von a

2) Bestimme für welches a die Oberfläche maximal wird

zu 1) Oberfläche $O(a,b) = 2 \times$ Dreiecksfläche $+ \; 3\times$ Rechteckfläche

$$= 2 \cdot a \cdot h \cdot \tfrac{1}{2} + 3ab = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + 3ab,$$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

Kantenlänge liefert Nebenbedingung: $144 = 6a + 3b$

$$\Leftrightarrow \; b = \tfrac{1}{3}(144 - 6a) = 48 - 2a, \text{ also:}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + 3a(48 - 2a) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + 144a - 6a^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\right)}_{<0} a^2 + 144a$$ ist quadratische Funktion

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 12 \checkmark$$

also Parabel nach unten geöffnet, daher Maximum am Scheitelpunkt

zu 2 Scheitelpunkt von f bestimmen, zB mit der Formel aus vorigem Kapitel

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \; c - \frac{b^2}{4a}\right) \text{ für } f(x) = ax^2 + bx + c$$

hier $a_0 = -\dfrac{144}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\right)} = -\dfrac{144}{\sqrt{3} - 12} = \dfrac{144}{12 - \sqrt{3}}$ ist die Stelle des lokalen Maximums von f

zu 2 alternativ mit LFZ: $f(a) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\right) a^2 + 144a = a \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\right) a + 144\right)$

Finde Nullstellen von f: $0 = f(a) \Rightarrow a = 0$ oder $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\right) a + 144 = 0$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ oder } a = -\frac{144}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 6}$$

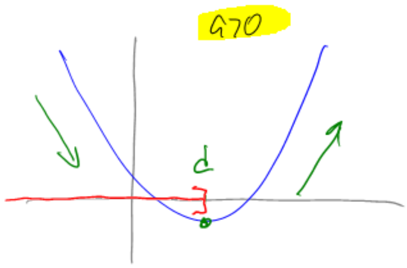
Wir wissen: die "x-Koordinate" des Scheitelpunktes liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, also: $\frac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{144}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 6}\right) = -\dfrac{144}{\sqrt{3} - 12} = \dfrac{144}{12 - \sqrt{3}}$

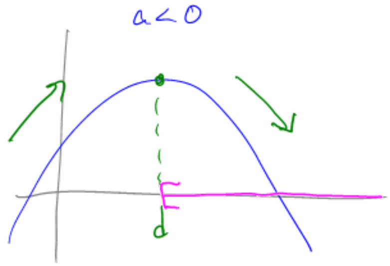
diese Methode funktioniert hier gut, weil • konstante Term der quadratischen Funktion Null ist.

3.4 Monotonie

Anders als bei linearen Funktionen sind quadratische Funktionen nicht auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend. Es gilt aber der folgende

Einschub 3.4.1. ...





Satz 3.4.2. *Eine quadratische Funktion f habe die Scheitelpunktsform*

$$f(x) = a(x-d)^2 + e.$$

- *Für $a > 0$ gilt: Auf dem Intervall $(-\infty, d]$ (also links vom Scheitelpunkt) ist der Graph von f streng monoton fallend und a uf dem Intervall $[d, +\infty)$ (also rechts vom Scheitelpunkt) ist der Graph von f streng monoton wachsend.*

- *Für $a < 0$ gilt: Auf dem Intervall $(-\infty, d]$ ist der Graph von f streng monoton wachsend und auf dem Intervall $[d, +\infty)$ ist der Graph von f streng monoton fallend.*

Beweis zu zeigen $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ für streng monoton wachsend

Sei $x_1 < x_2$ gegeben, dann gilt für die Differenz

a ausklammern

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2-d)^2 + e - (a(x_1-d)^2 + e) = a\left((x_2-d)^2 - (x_1-d)^2\right) \\ &= a \cdot \left((x_2-d) + (x_1-d)\right) \cdot \left((x_2-d) - (x_1-d)\right) \\ &= a \cdot \left((x_2-d) + (x_1-d)\right) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \end{aligned}$$

3-Binomi

3Binomi $s^2 - t^2 = (s+t)(s-t)$

$= x_2 - x_1$

Nun betrachten wir die Fälle $a > 0$ und $a < 0$:

Einschub 3.4.3. ... $a>0$ 1) $x_1 < x_2 \le d \Rightarrow x_1 - d < 0,\ x - d \le 0$

$\Rightarrow a(x_1 - d + x_2 - d) < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

$\Rightarrow f$ monoton fallend

2) $d \le x_1 < x_2$

$\Rightarrow x_1 - d \ge 0,\ x_2 - d > 0$

$\Rightarrow x_1 - d + x_2 - d > 0 \Rightarrow a(x_1 - d + x_2 - d) \overset{a>0}{>} 0$ $\quad x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f$ mon. wachsend

$a<0$ Übung!

3.5 Quadratisches Wachstum

Bei linearem Wachstum erhält man bei gegebenem Zuwachs Δx der x-Werte stets denselben Zuwachs Δy der zugeordneten y-Werte, d.h. die Zunahme (Steigungsfaktor) ist konstant. Wächst hingegen die Zunahme linear, so erhält man quadratisches Wachstum:

Einschub 3.5.1. ...

Beispiel 3.5.2.

(i) Betrachte die Funktion $f(x) = ax$ und die Dreiecksfläche $A(x)$, den Graphen von f, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(x, 0)$.

Einschub 3.5.3. ...

Dann gilt für den Zuwachs in x bei gegebener Zunahme Δx:

Einschub 3.5.4. ...

d.h. die relative Zunahme in x beträgt

Einschub 3.5.5. ...

d.h. der relative Zuwachs ist linear. Elementargeometrisch sieht man sofort, dass die Größe $A(x)$ quadratisch wächst: $A(x) = \frac{1}{2}ax^2$.

(ii) Als diskretes Analogon betrachte die Folge der ungeraden Zahlen 1,3,5,7,.... Diese Folge wächst linear (Konstante Zuwächse, nämlich gleich 2).

Sei s_n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Es gilt $s_n = n^2$. Die Folge s_n wächst daher quadratisch.

Einschub 3.5.6. ... $s_1 = 1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 9, \quad s_n = 1+3+5+\dots+2n-1$

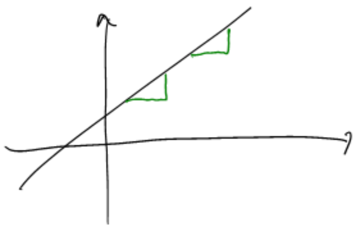
$\Rightarrow s_n - s_{n-1} = 2n-1$ also Zuwächse wachsen linear mit n

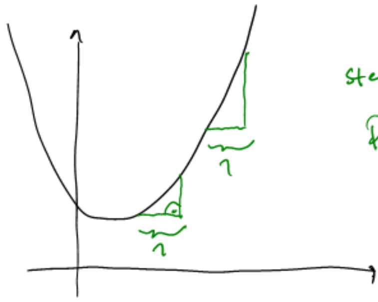
aber $s_n =$  $= n^2$ die Summe selbst wächst quadratisch

3.5 Quadratisches Wachstum

Bei linearem Wachstum erhält man bei gegebenem Zuwachs Δx der x-Werte stets denselben Zuwachs Δy der zugeordneten y-Werte, d.h. die Zunahme (Steigungsfaktor) ist konstant. Wächst hingegen die Zunahme linear, so erhält man quadratisches Wachstum:

Einschub 3.5.1. ...



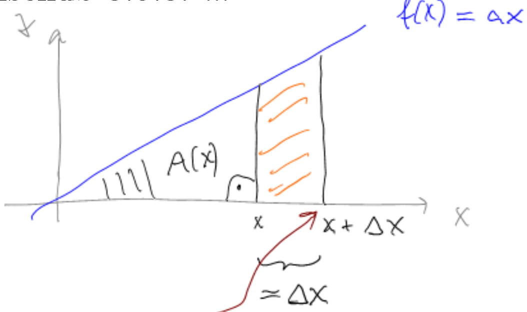


Steigungsdreiecke bei Parabel nicht mehr ähnlich

Beispiel 3.5.2.

(i) Betrachte die Funktion $f(x) = ax$ und die Dreiecksfläche $A(x)$, den Graphen von f, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(x, 0)$.

Einschub 3.5.3. ...



$$A(x) = \text{Dreiecksfläche} = x \cdot f(x) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} a x^2$$

Dann gilt für den Zuwachs in x bei gegebener Zunahme Δx:

Einschub 3.5.4. ...

$$A(x+\Delta x) = (x+\Delta x) \cdot f(x+\Delta x) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (x+\Delta x)^2 \cdot a$$

$$A(x+\Delta x) - A(x) = \tfrac{1}{2} a (x+\Delta x)^2 - \tfrac{1}{2} a x^2 = \tfrac{1}{2} a \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - \tfrac{1}{2} a x^2$$

$$= \tfrac{1}{2} a \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\right) = \tfrac{1}{2} a \left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right)$$

d.h. die relative Zunahme in x beträgt

Einschub 3.5.5. ...

$$\frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \tfrac{1}{2} a (2x + \Delta x) = ax + \tfrac{1}{2} a \Delta x$$

für Δx „sehr klein" wächst rel. Zunahme linear in x

d.h. der relative Zuwachs ist linear. Elementargeometrisch sieht man sofort, dass die Größe $A(x)$ quadratisch wächst: $A(x) = \frac{1}{2}ax^2$.

(ii) Als diskretes Analogon betrachte die Folge der ungeraden Zahlen 1,3,5,7,.... Diese Folge wächst linear (Konstante Zuwächse, nämlich gleich 2).

Sei s_n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Es gilt $s_n = n^2$. Die Folge s_n wächst daher quadratisch.

Einschub 3.5.6. ...

siehe 14.11.2025

(iii) *Gleichmäßig beschleunigte Bewegung* Geschwindigkeit – Zeit – Gesetz

Anders als bei gleichförmigen Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeit v (d.h. die Ortsveränderung pro Zeit) konstant ist, wächst v hier linear mit der Zeit t, d.h.

$a = 5\ \frac{m}{s^2}$, $v_0 = 10\ \frac{m}{s}$

$$v(t) = a \cdot t + v_0,$$

$t = 0:\ v(0) = v_0$

„$\frac{m}{s^2} \cdot s + \frac{m}{s} = \frac{m}{s}$" Einheiten

wobei v_0 die *Anfangsgeschwindigkeit* und a die *Beschleunigung* bezeichnet. Für den zurückgelegten Weg $s(t)$ nach der Zeit t gilt dann

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

Weg – Zeit – Gesetz

$s(0) = s_0$

wobei s_0 die Anfangsposition zur Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet.

Beispiel 3.5.7. Es folgen Beispiele zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

- *Bremsen:* Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und wird abgebremst, d.h. es tritt eine negative Beschleunigung $-a$ auf. Entsprechend liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Weg-Zeit-Gesetz

  $$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + 0 \qquad s_0 = 0$$

  vor. Der Zeitpunkt t_0 des Anhaltens ist gegeben durch

  $$v(t_0) = -at_0 + v_0 = 0,$$

  umstellen nach t_0 ergibt

  d.h. $\boxed{t_0 = \frac{v_0}{a}}$. Der Bremsweg ist gegeben durch

  $= -\frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$ $\quad = v_0^2/a$

  $$s(t_0) = -\tfrac{1}{2}at_0^2 + v_0 t_0 = -\tfrac{1}{2}a\left(\tfrac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\tfrac{v_0}{a} = \tfrac{1}{2a}v_0^2,$$

  d.h. der Bremsweg wächst quadratisch mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

  Einschub 3.5.8. ... Bremsweg beim Radfahren: bremsen mit $5\ \frac{m}{s^2}$

  $14{,}5\ \frac{km}{h} \approx 4\ \frac{m}{s} \rightsquigarrow s = \frac{4^2}{2 \cdot 5} = \frac{16}{10} = 1{,}6$ (Meter)

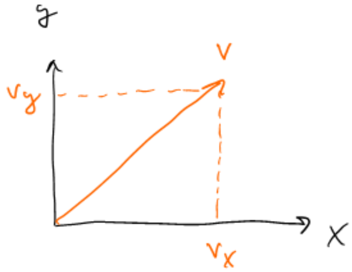
  $25\ \frac{km}{h} \approx 7\ \frac{m}{s} \rightsquigarrow s = \frac{7^2}{2 \cdot 5} = \frac{49}{10} = 4{,}9$ (Meter)

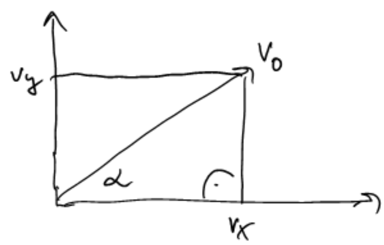
- *freier Fall:* Im Schwerefeld der Erde bewegt sich jeder Körper gleichmäßig beschleunigt nach unten. Die Beschleunigung beträgt ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands $a = -g$, mit $g \approx 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Entsprechend lautet das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls

  $$s(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

- *Wurfparabel:* Wirft man einen Körper schräg nach oben, so wird die Flugbahn durch eine Wurfparabel beschrieben. Diese Parabel hängt ab von der Anfangsgeschwindigkeit: Sei v_x die Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung und v_y die Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung.

  Einschub 3.5.9. ...





$\sin\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{\text{„Gegkath."}}{\text{Hypo}}$

$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_0} = \frac{\text{„Ankath."}}{\text{Hypo}}$

Alternativ kann man die Anfangssituation auch beschreiben mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Körpers und dem Abwurfwinkel α gegenüber der Horizontalen. In diesem Fall ist dann

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad v_y = v_0 \cdot \sin\alpha.$$

Pythagoras

oder umgekehrt:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\right).$$

Die Bewegung in horizontaler Richtung ist eine gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_x, d.h. für die x-Koordinate des Körpers gilt:

$$x(t) = v_x \cdot t.$$

Die Bewegung in vertikaler Richtung ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_y und Beschleunigung $-g$, d.h. für die y-Koordinate des Körpers gilt:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}g \cdot t^2 + v_y \cdot t.$$

Bestimmung der Bahnkurve: Aus

$$x(t) = v_x \cdot t$$

folgt

$$t = \frac{x(t)}{v_x}.$$

Einsetzen in die Gleichung für $y(t)$ liefert:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x(t)}{v_x}\right)^2 + v_y \cdot \frac{x(t)}{v_x},$$

d.h. aufgefasst als Funktion von x ist y eine quadratische Funktion, die Bahnkurve ist also parabelförmig. Um die Wurfweite[1] zu bestimmen, setzen wir $y = 0$ und bestimmen die zugehörige Wurfweite x:

$$y = 0 \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}g \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{v_x}\right)^2}_{= x^2/v_x^2} + v_y \cdot \frac{x}{v_x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2} \cdot x \cdot \left(x - 2\frac{v_x^2 \cdot v_y}{g \cdot v_x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2} \cdot x \cdot \left(x - \frac{2v_x \cdot v_y}{g}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{2v_x \cdot v_y}{g},$$

d.h die Wurfweite beträgt $\frac{2v_x \cdot v_y}{g}$.

3.6 Polynomfunktionen

Definition 3.6.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Polynom(funktion)*, falls es *Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ist $a_n \neq 0$, so sagen wir, dass das Polynom den *Grad n* hat (kurz: grad$(f) = n$). Für das Nullpolynom $f = 0$ setzen wir grad $(f) = -\infty$.

Einschub 3.6.2. ... $f(x) = 1 \cdot x^3 + 2x^2 + x + 1$ $\quad$ grad $f = 3$

linear $\quad f(x) = 2x^1 + 5 \quad$ grad $f = 1$ $\qquad$ konstant $\quad f(x) = a_0 \quad$ grad $f = 0$

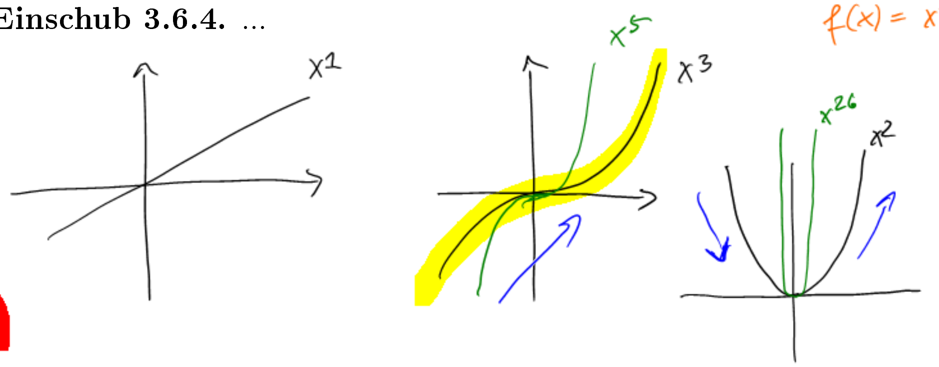
quadratisch $\quad f(x) = -x^2 + 5 \quad$ grad $f = 2$

[1] Hier gehen wir vereinfachend davon aus, dass der Körper am Boden abgeworfen wird und auch wieder am Boden landet, anderenfalls muss man die Abwurfhöhe mit berücksichtigen.

Beispiele 3.6.3. a. Polynome vom Grad 0 bzw. Grad 1 bzw. Grad 2 sind die konstanten bzw. linearen bzw. quadratischen Funktionen.

b. Polynome der Form $f(x) = x^n$ heißen *Potenzfunktionen* oder *Monome*. Monome f mit ungeradem Grad sind punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Einschub 3.6.4. ...



$f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = \overbrace{(-x)}^{=(-1)\cdot x}(-x)(-x)$

$= (-1)^3 \cdot x^3 = (-1)x^3 = -x^3$

$= -f(x)$

$f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)(-x)(-x)(-x)$

$= (-1)^4 x^4 = x^4 = f(x)$

Monome von geradem Grad sind achsensymmetrisch zur vertikalen Achse, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Sie sind streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, +\infty)$.

Polynome haben ähnliche Eigenschaften wie die ganzen Zahlen:

Satz 3.6.5. *Die Menge der Polynome bilden (wie $\mathbb{Z}$) einen* euklidischen Ring, *d.h man kann Polynome mit den üblichen Rechenregeln addieren, subtrahieren und multiplizieren. Das Verfahren der Polynomdivison liefert eine Division mit Rest wie folgt:*

Zu Polynomen f und g, $g \neq 0$ (Nullpolynom), gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r mit

$$grad(r) < grad(g) \quad \text{und} \quad f = q \cdot g + r,$$

man spricht f durch g ergibt q mit Rest r.

Der Grad des Summenpolynoms ist kleiner gleich dem Maximum der Grade der Summanden. Der Grad des Produktpolynoms ist gleich der Summe der Grade der Faktoren.

Bemerkung 3.6.6. Man addiert und subtrahiert Polynome, indem man die Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert. Dabei setzt man „fehlende" Koeffizienten gleich 0. Das Produkt der Polynome

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

bestimmt man, indem man das Produkt

$$(a_m x^m + \ldots + a_0)(b_n x^n + \ldots + b_0)$$

in eine Summe $a_m b_n x^{m+n} + \ldots + a_0 b_0$ überführt.

Einschub 3.6.7. ... Addition $(3x^3 + 2x^2 - 5) + (x^4 - x^3 + x + 1)$

$= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 4$

Subtraktion analog, jedes Polynom hat ein "Negatives", also zB

$(x^3 + x) - (x^3 + x) = 0$ also $-x^3 - x$ Negatives von $x^3 + x$

$x^2 x^4 = x^{2+4}$

Allgemein KG, AG, DG gelten für Polynome, weil sie in R gelten

Multiplikation $(x^2 - x) \cdot (x^4 + x^3) = x^2 \cdot (x^4 + x^3) - x(x^4 + x^3) = x^6 + x^5 - x^5 - x^4$

$= x^6 - x^4$

nicht möglich $x^5 \cdot x^{-5} = x^{5+(-5)} = x^0 = 1$

LO nicht erlaubt

Beispiele 3.6.8. $\boxed{\text{Polynomdivision mit Rest}}$

Bsp teile $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2$ durch $g(x) = x^2 + x$

$$(x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x) = x^2 + 2x - 1 + \frac{4x+2}{x^2+x} \iff (*)$$

$$\begin{array}{l}
-(x^4 + x^3) \\
\quad 2x^3 + x^2 + 3x + 2 \\
\quad -(2x^3 + 2x^2) \\
\qquad -x^2 + 3x + 2 \\
\qquad -(-x^2 - x) \\
\qquad\quad 4x + 2
\end{array}$$

$\lightning$ denn $1 < 2$ $\leadsto$ Abbruch liefert Rest: $4x + 2$

analog in $\mathbb{Z}$:

$8 = 2 \cdot 3 + 2$

"8 durch 3 $= 2$ Rest 2"

$$(*) \iff \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = x^2 + 2x - 1 + \frac{4x+2}{x^2+x} \quad \Big| \cdot (x^2+x)$$

$$\iff \underbrace{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2}_{f(x)} = \underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + x)}_{g(x)} + \underbrace{4x+2}_{r(x)}$$

Einschub 3.6.9. ...

Beispiele 3.6.8. Polynomdivision mit Rest

Einschub 3.6.9. ... „Beweis" des Satzes. Existenz von q und r durch das Verfahren der Polynomdivision. Eindeutigkeit von q und r

Seien $q \cdot g + r = f = q' \cdot g + r'$. zwei Darstellungen von f

Zu zeigen ist $q = q'$ und $r = r'$. Für die Polynome r, r' gilt

$\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$ und $\operatorname{grad}(r') < \operatorname{grad}(g)$. Dann: $q \cdot g + r = q' g + r'$

$\Rightarrow q \cdot g - q' \cdot g = r' - r \Rightarrow \underbrace{(q - q') \cdot g}_{\text{Vielfaches von } g} = \underbrace{r' - r}_{\operatorname{grad}(r'-r) < \operatorname{grad}(g)}$

$\rightsquigarrow$ Grad „links" $\geq \operatorname{grad}(g)$ und grad „rechts" $< \operatorname{grad}(g)$

$\Rightarrow q - q' = 0$

$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$ □

3.7 Nullstellen von Polynomen

Wie für quadratische Funktionen liefert der Ansatz

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad a \neq 0 \qquad f(x_2) = 0$$

ein Polynom

$$f(x) = ax^n + \dots$$

vom Grad n mit genau den Nullstellen $x_1, ..., x_n$. Diese Darstellung heißt entsprechend auch *Linearfaktorzerlegung*. Ist eine Nullstelle x_1 bekannt, so kann man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspalten:

Einschub 3.7.1. ... $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

also f hat Nullstelle $x_1 = 1$. Also ist f durch $x - x_1 = x - 1$ ohne Rest teilbar:

$x^3 : x = x^2$

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6$$

$$
\begin{array}{l}
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad -x^2 - 5x + 6 \\
\quad -(-x^2 + x) \\
\hline
\qquad -6x + 6 \\
\qquad -(-6x + 6) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Rest

also:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}_{= f(x)} = \underbrace{(x^2 - x - 6)}_{= g(x)}(x-1)$$

Nullstellen von $g(x)$: $x \underset{p/q\,F}{=} \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \underbrace{6}_{= \frac{24}{4}}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x = 3$ oder $x = -2$ Insgesamt $f(x) = (x-3)(x+2)(x-1)$

Satz 3.7.2. *Sei f ein Polynom vom Grad n, dann gilt:*
Der Punkt $x_1 \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle von f, wenn es ein Polynom g vom Grad $n-1$ mit

$$f(x) = (x - x_1)g(x)$$

gibt. Das bedeutet, dass $x - x_1$ das Polynom f ohne Rest teilt.

Beweis Aufgrund der Division mit Rest existieren Polynome q und r mit

ausgelassen

$$f(x) = q(x)(x - x_1) + r(x), \text{ mit } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(x - x_1) = 1,$$

d.h. $r(x) = r_0$ ist eine Konstante. Nun ist x_1 genau dann eine Nullstelle von f, wenn

$$0 = f(x_1) = q(x_1)(x_1 - x_1) + r(x_1) = r_0,$$

also genau dann, wenn $f(x)$ ohne Rest durch $(x - x_1)$ teilbar ist. □

Folgerung 3.7.3. *Sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dann gilt:*
Sind $x_1, ..., x_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f, so gibt es natürliche Zahlen $n_1, ..., n_k$ und ein Polynom g vom Grad $n - n_1 - n_2 - ... - n_k$ ohne reelle Nullstellen, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}...(x - x_k)^{n_k} g(x).$$

Insbesondere hat ein Polynom vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen.

Einschub 3.7.4. ... Bsp $f(x) = 2(x-1)^3 (x+2)^4 (x-3)^1 \overbrace{(x^2+1)}^{g(x)}$

$n_1 = 3$, $x_1 = 1$; $n_2 = 4$, $x_2 = -2$; $n_3 = 1$, $x_3 = 3$

$\operatorname{grad}(g) = 2$, $\underbrace{\operatorname{grad}(f) = 10}_{= n}$, $10 - 3 - 4 - 1 = \underbrace{2}_{= \operatorname{grad}(g)}$

$\rightarrow$ hat keine reelle Nullstelle, aber zwei NST in $\mathbb{C}$: $i, -i$.
(in $\mathbb{C}$: $i^2 = -1$)

Bemerkung 3.7.5. In den komplexen Zahlen gilt sogar der *Fundamentalsatz der Algebra*:

„Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.“

Durch sukzessiven Abspalten der Nullstellen folgt, dass für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ komplexe Zahlen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ als Nullstellen von f mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

existieren.

Im Reellen kann man mithilfe dieser Überlegungen (in den komplexen Zahlen) zeigen, dass sich jedes Polynom in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen lässt: Für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten und reellen Nullstellen $x_1, ..., x_k$ gibt es quadratische Funktionen $q_1, ..., q_m$ ohne reelle Nullstellen, so dass

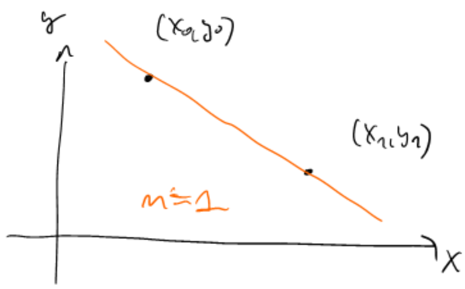
$g(x)$

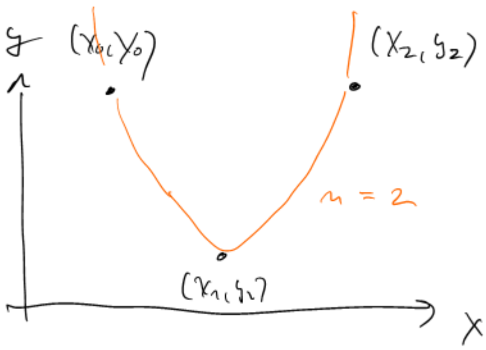
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)\overbrace{q_1(x)...q_m(x)}^{g(x)} \qquad \textit{(Reelle Produktdarstellung)}$$

gilt.

3.8 Anwendung: Interpolation

Einschub 3.8.1. ...





Existenz

Satz 3.8.2. *Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ Punkte mit paarweise verschiedenen x_i's. Dann gibt es genau ein Polynom f vom Grad höchstens n mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, ..., n$. Diese Polynomfunktion f heißt* Interpolationspolynom.

Eindeutig

Faktor $(x - x_i)$ fehlt

Zum Beweis der Existenz solcher Polynome betrachtet man die sogenannten *Lagrange-Interpolationspolynome*

$$p_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}; \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

Faktor $(x_i - x_i)$ fehlt

für die gilt

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

$$p_1(x_2) = \frac{(\ldots)\cdots\overbrace{(x_2 - x_2)}^{=0}\cdots(\ldots)}{\ldots\ldots} = 0$$

$$p_i(x_i) = \frac{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_n)} = 1$$

Dann ist

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x)$$

das gesuchte Polynom.

Einschub 3.8.3. ...

Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zeigt man so: Sind f und g Interpolationspolynome, dann hat ist $f-g$ ein Polynom vom Grad höchstens n mit $n+1$ Nullstellen $x_0, ... x_n$. Daher muss $f-g$ das Nullpolynom sein, also $f=g$.

Zur Berechnung des Interpolationspolynoms kann man daher die Lagrange-Interpolationspolynome bestimmen und dann f wie oben angegeben berechnen.
Alternativ kann man mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ansetzen und aus den Gleichungen

$$f(x_0) = y_0, ..., f(x_n) = y_n$$

ein lineares Gleichungssystem mit $n+1$ Gleichungen und den $n+1$ Unbekannten $a_n, ..., a_0$ erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem hat nach dem vorstehenden Satz genau eine Lösung, nämlich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms.

Es folgt ein Beispiel zur Langrange-Interpolation:

Einschub 3.8.4. ... Beispiel zur Interpolation. Betrachte $P_0(-1,6)$, $P_1(1,2)$, $P_2(2,3)$ (3 Punkte ⇝ Polynom vom Grad 2), also Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Erhalte Gleichungen wie folgt: Punkte liegen auf Graph f, also gilt: $f(-1) = 6$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 6 &= f(-1) = a - b + c \\ 2 &= f(1) = a + b + c \\ 3 &= f(2) = 4a + 2b + c \end{aligned}$$

erhalte ein LGS in 3 Variablen a, b, c mit 3 Gleichungen.

Lösung mit Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -21 \end{array}$$

$$\longmapsto \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -3c &= -9 &\Rightarrow c &= 3 \\ 2b &= -4 &\Rightarrow b &= -2 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow a = 6 + b - c = 6 - 2 - 3 = 1$$

<u>Also</u> $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ⟵ Interpolationspolynom