REP 01

Freitag, 16. Januar 2026 07:40

Aufgabe R01 [Kombinatorik I]
Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen (mit Begründung!)!

1 Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 10 Leichtathleten ein Team für eine 4 × 400 m - Staffel zusammenzustellen?

Falls man die Staffelreihenfolge nicht berücksichtigen möchte

das ist Begründung

ergeben sich $\binom{10}{4}$ Möglichkeiten (ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen) also: $n = 10,\ k = 4$ $\binom{10}{4} \overset{\text{Def}}{=} \frac{10!}{4!\,\underbrace{(10-4)}_{=6}!}$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot(\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6})} = 5\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 210$$

Falls man die Staffelreihenfolge beachten möchte, ergeben sich

$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$ Möglichkeiten (mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen), $n = 10,\ k = 4$

2 Wie viele Worte der Länge 5 (zur Erklärung: Ein Wort der Länge 5 ist eine Anordnung von fünf Buchstaben unabhängig davon, ob diese Anordnung eine sprachliche Bedeutung hat) kann man aus den Buchstaben des Wortes E R F O L G bilden, wenn

(i) jeder Buchstabe höchstens einmal auftreten darf,

(ii) Buchstaben wiederholt werden dürfen.

zu (i) 5 mal Ziehen ohne Zurücklegen mit Reihenfolge, also

$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6!$ $(n = 6,\ k = 5)$

ein Buchstabe bleibt übrig

z(ii)

5 mal Ziehen mit Zurücklegen mit Reihenfolge, also

$6^5 = 7776$ $(n = 6,\ k = 5)$

3 Ein Möbelhaus bietet als Sonderangebot ein 10er Paket Kerzen an, das man sich selbst aus verschiedenfarbigen Kerzen beliebig zusammenstellen kann. Man kann zwischen 4 Farben wählen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Dfn $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ohne Reihenfolge, Mit Zurückle

10 mal Ziehen aus 4 also, $k=10$, $n=4$:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10!\,3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{6}$$

$\frac{13!}{10!(13-10)!}$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3$

$$= 13\cdot 2\cdot 11 = 2\cdot 143 = 286$$

Aufgabe R02 [Mechanisches Türschloss]
Wir betrachten ein mechanisches Türschloss mit 9 Feldern, die wie eine Telefontastatur angelegt und beschriftet seien. Die zufällig gewählte Zahlenkombination, die das Schloss entriegelt, bestehe aus 2 verschiedenen Ziffern, die zum Entriegeln *gleichzeitig* gedrückt werden müssen.
Nun werden zufällig zwei verschiedene Ziffern gleichzeitig gedrückt.

- **a** Geben Sie den Ereignisraum Ω und das Wahrscheinlichkeitsmaß P explizit angeben. Begründen Sie Ihre Wahl.
- **b** Geben Sie eine Menge $A \subset \Omega$ an, die das Ereignis, die richtige Ziffernkombination zu treffen, beschreibt.
- **c** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A.

a $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\dots\} = \{\{i,j\} \mid i\neq j,\ i,j\in\{1,\dots,9\}\}$, Da wir zufällig drücken hat jedes Elementarereignis dieselbe Wahrscheinlichkeit $p(\{i,j\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{9}{2}}$ (Laplace-Experiment)

$k=2$ aus $n=9$ Ziehen OZ, ORF; also Anzahl 2-elementige TM einer 9-elementigen Menge

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$$

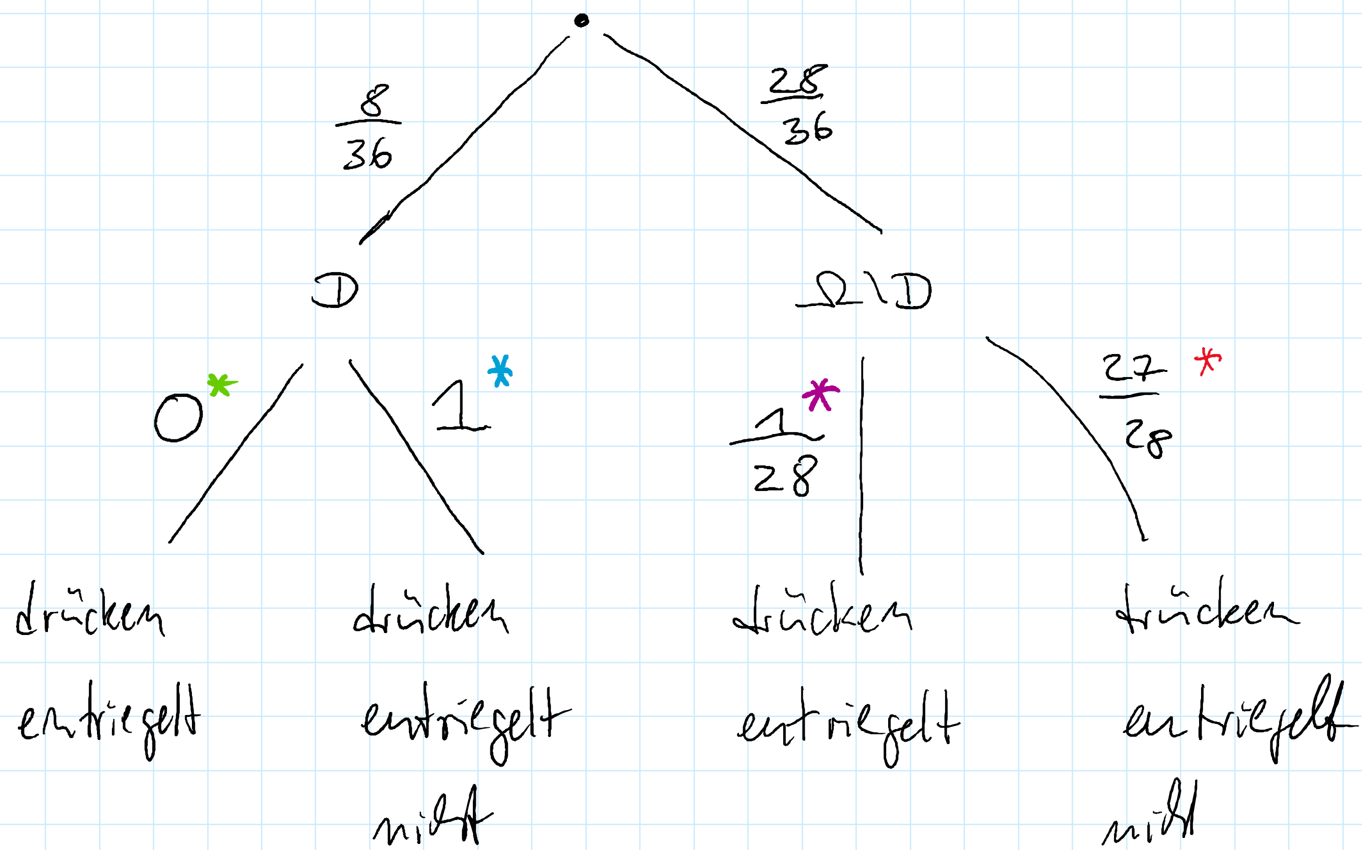
zu b Es sei $\{i_0,j_0\}\in\Omega$ die Kombination, die entriegelt.

Dann $A := \{\{i_0,j_0\}\}\subset\Omega$, also $\overset{\text{zu c}}{\Rightarrow}$ $P(A) = p(\{i_0,j_0\}) = \frac{1}{36}$.

d Der Zahlencode zur Entriegelung wurde eingestellt, als das Schloss noch einwandfrei funktionierte. Aber nun ist die Tastatur alt und verschlissen. Es klemmt (oder fehlt) die Taste mit der Nummer 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mit dem ersten Versuch die richtige Ziffernkombination treffen?

$D := \{ \{1,3\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{5,3\}, \{6,3\}, \{7,3\}, \{8,3\}, \{9,8\} \} \subset \Omega$ sind die Elementarereignisse, die eine 3 beinhalten, also 8 Stück ($|D| = 8$)

Dann ist $P(D)$ die Wkeit, dass die richtige Kombination $\{i_0, j_0\}$ in D ist



* das Drücken ausgehend von D entriegelt nicht, weil das Drücken auf die 3 keine

nicht, weil das Drücken auf die 3 keine Wirkung hat (ist kaputt)

* ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu 1

* ausgehend $\Omega \setminus D$, also richtige Kombination nicht in D, hat die richtige Kombination keine 3, $\rightsquigarrow$ $P(\text{entriegelt} \mid \Omega \setminus D) = \frac{1}{28}$

* Gegenwahrscheinlichkeit zu $\frac{1}{28}$

Insgesamt $P(\text{entriegelt}) = \underset{\boxed{\text{tot Wkeit}}}{0} \cdot \frac{8}{36} + \frac{1}{28} \cdot \frac{28}{36}$

$= \frac{1}{36}$