REP 03

Freitag, 23. Januar 2026 07:32

Klausuraufgabe (alt), HA20, PA15

Aufgabe R06 [Kennzahlen einr Stichprobe I]
Gegeben ist die folgende (geordnete) Stichprobe eines quantitativen Merkmals:

$$8, 11, 15, 15, 19, 21, 23$$

(i) Bestimmen Sie die folgenden statistischen Kennzahlen der Stichprobe:
Median, arithmetisches Mittel, Quartilsabstand und Varianz.
Stellen Sie dar (ggf. Formeln, ausführliche Rechnung), wie Sie die Kennzahlen ermittelt haben.

(ii) Erstellen Sie einen Boxplot der Stichprobe.

$n=7$ ist Stichprobenumfang, Bezeichnung $x_{(1)} = 8$, $x_{(2)} = 11$

$x_{(3)} = 15, \dots, x_{(7)} = 23$ Falls zB eine Stichprobe 43, 1, 38

nicht geordnet ist, ordne erst: $x_1 = 43$, $x_2 = 1$, $x_3 = 38$

$\overset{\text{ordnen}}{\rightsquigarrow}$ $x_{(1)} = 1$, $x_{(2)} = 38$, $x_{(3)} = 43$ — Bezeichung für Median

SatzVL

Median $\frac{n}{2} = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow x_{0,5} = x_{(\lceil 0{,}5 \cdot n \rceil)} = x_{(\lceil 3{,}5 \rceil)} =$

$= x_{(4)} = 15$

arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{7}(8 + 11 + 15 + 15 + 19 + 21 + 23)$

$= \frac{112}{7} = 16$

unteres Quartil $\frac{n}{4} = \frac{7}{4} \notin \mathbb{N} \Rightarrow x_{0,25} = x_{(\lceil 0{,}25 \cdot n \rceil)} =$

$x_{(\lceil 0{,}25 \cdot 7 \rceil)} = x_{(\lceil 1{,}75 \rceil)} = x_{(2)} = 11$

oberes Quartil $\frac{3}{4} n \notin \mathbb{N} \Rightarrow x_{0,75} = x_{(\lceil n \cdot 0{,}75 \rceil)} = x_{(\lceil 7 \cdot 0{,}75 \rceil)}$

$= x_{(\lceil 5{,}25 \rceil)} = x_{(6)} = 21$

Quartilsabstand $x_{0,75} - x_{0,25} = 21 - 11 = 10$

Varianz weil wir $\bar{x}$ schon berechnet haben, nehmen wir die

Steiner'sche Formel: $s^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \bar{x}^2 =$

$= \frac{1}{7}(8^2 + 11^2 + 15^2 + 15^2 + 19^2 + 21^2 + 23^2) - (16)^2$

$= \frac{1}{7}\left(8^2+11^2+15^2+15^2+19^2+21^2+23^2\right) - (16)^2$

$= \frac{1}{7}\left(64+121+225+225+361+441+529\right) - 256$

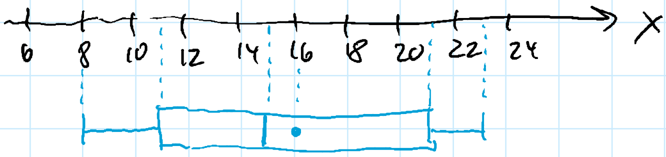
$= \frac{1966}{7} - 256$

↳ „Niedersachsenmethode":

$1400 : 7 = 200$
$560 : 7 = 80$
$6 : 7 = ?$

$\Rightarrow \frac{1966}{7} = 280 + \frac{6}{7}$

(ii)



Aufgabe R07 [Eintrittskarten] Klausuraufgabe (alt), HA11

Ein Zirkus verkauft im Schnitt pro Vorstellung 120 Karten, wenn der Eintritt 12 € beträgt. Eine Unternehmensberatung hat analysiert, dass durch eine Preissenkung die Anzahl der verkauften Karten erhöht werden kann: bei einer Preisreduktion um jeweils 1 € würden jeweils 15 Karten mehr verkauft werden.

(i) Bestimmen Sie eine Funktion, die die Zahl der verkauften Karten in Abhängigkeit vom Eintrittspreis angibt.

(ii) Bestimmen Sie den Eintrittspreis, der die höchste Gesamteinnahme einbringt. Stellen Sie dazu eine geeignete Funktion auf.

(i) $x \hat{=}$ Eintrittspreis, $f(x) \hat{=}$ Anzahl verkaufter Karten,

Ansatz $f(x) = ax + b$ lineare Funktion, aus Aufgabe:

$f(12) = 120$, $f(11) = 120 + 15 = 135 \Rightarrow 120 = 12a + b$,

$135 = 11a + b \Rightarrow 120 - 12a = 135 - 11a \Rightarrow$

$-15 = a \Rightarrow b = 120 - 12a = 120 - 12(-15) = 300$

Insgesamt $f(x) = -15x + 300$

Alternativ mit 2-Punkte-Form: $(x_0, y_0) = (12, 120)$, $(x_1, y_1) =$

$= (11, 135)$. $f(x) = \frac{y_1 - y_0}{\quad}(x - x_0) + y_0 = \frac{135 - 120}{\quad}(x - 12) + 120$

$= (11, 135)$, $f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 = \frac{135 - 120}{11 - 12}(x - 12) + 120$

$= \frac{15}{-1}(x-12) + 120 = -15x + 180 + 120 = -15x + 300$

(ii) Gesamteinnahme $g(x) = x \cdot f(x) =$ (Preis · Anzahl)

$= x(-15x + 300) = -15x^2 + 300x = g(x)$

Gesucht ist das Maximum von $g(x)$: wissen, dass das Maximum am Scheitelpunkt auftritt (denn $-15 < 0 \Rightarrow$ nach unten geöffnete Parabel) also Scheitelpunktsform von g:

Quadratische Ergänzung: $g(x) = (-15) \cdot (x^2 - \underbrace{20}_{:2 \rightsquigarrow 10}x) =$

$= (-15) \cdot (x^2 - 20x + 10^2 - 10^2)$

$= (-15) \cdot ((x - 10)^2 - 10^2) = (-15) \cdot (x-10)^2 + 1500$

$\Rightarrow S(10; 1500)$ also maximale Einnahmen für Preis $x = 10$

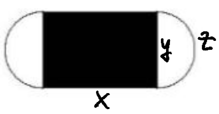
Alternativ Formel $g(x) = ax^2 + bx + c = \overbrace{-15}^{=a}x^2 + \overbrace{300}^{=b}x + \overbrace{0}^{=c}$

$g(x) = a(x-d)^2 + e$ wobei $d = -\frac{b}{2a} = -\frac{300}{-30} = 10$

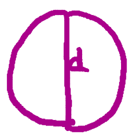
$e = c - \frac{b^2}{4a} = 0 - \frac{300^2}{-60} = 5 \cdot 300 =$
$= 1500$

Aufgabe R08 [Laufbahn] HA11, PA12

~~Eine 900m~~-Laufbahn besteht aus zwei gegenüberliegenden parallelen Strecken und den sie verbindenden halbkreisförmigen Kurvenstücken:



x, y



Umfang $= \pi d$

Bestimmen Sie die Länge der geraden Stücke so, dass die zwischen den geraden Stücken eingeschlossene Rechtecksfläche (Spielfeld) eine möglichst große Fläche erhält. Stellen Sie dazu die Spielfeldfläche als Funktion der Länge einer Seite des Spielfeldes dar. (Erinnerung: Die Länge der Kreislinie eines Kreises mit Durchmesser d ist $\pi \cdot d$.)

Rechtecksfläche (Spielfeld) eine möglichst große Fläche erhält. Stellen Sie dazu die Spielfeldfläche als Funktion der Länge einer Seite des Spielfeldes dar. (Erinnerung: Die Länge der Kreislinie eines Kreises mit Durchmesser d ist $\pi \cdot d$.)

$$900 = 2x + 2z, \quad z = \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} y$$

$$= 2x + \pi y$$

Fläche Spielfeld: $F = x \cdot y = y \cdot \left(\frac{900 - \pi y}{2} \right) =$

$$= y \cdot \left(450 - \frac{\pi}{2} y \right) = \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{=a} y^2 + \underbrace{450}_{=b} y \underbrace{+0}_{=c} =: f(y)$$

Also maximiere $f(y)$ in y:

Scheitelpunkt: $d = -\frac{b}{2a} = -\frac{450}{-\pi} = \frac{450}{\pi}$, also für

$y = \frac{450}{\pi}$ ist Fläche maximal, und $x = \frac{900 - \pi \cdot \frac{450}{\pi}}{2} = 225$