# REP 04

Dienstag, 27. Januar 2026 07:42

**Aufgabe R09** [Quadratische Funktion I] Klausuraufgabe (alt), HA 10

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift $f(x)$ einer quadratischen Funktion in Normalform, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- der Graph von $f$ verläuft durch den Ursprung $(0;0)$,
- der Scheitelpunkt besitzt die $x$-Koordinate 2 und
- $f(1) = 3$.

Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Möglichkeit $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = c$, $f(1) = 3 \Rightarrow 3 = a + b + \underset{=0}{c}$

$= a + b \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx$ $\quad 3 = a+b$

Scheitelpunktskoordinate $\quad 2 \overset{\text{Formel}}{=} -\frac{b}{2a} = -\frac{3-a}{2a} \quad | \cdot 2a \Rightarrow$

$4a = -(3-a) \Rightarrow 4a = -3 + a \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

$3 = a+b$

$\Rightarrow 3 = -1 + b \Rightarrow b = 4$ Insgesamt $f(x) = -x^2 + 4x$

2. Möglichkeit Scheitelpunktsform: $f(x) = a(x-d)^2 + e$

$= a(x-2)^2 + e$

$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = 4a + e \Rightarrow e = -4a$

$f(1) = 3 \Rightarrow 3 = a + e \Rightarrow e = 3 - a$

$\Rightarrow -4a = 3 - a \Rightarrow -3 = 3a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow e = 4$

$\Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 4 = -(x^2 - 4x + 4) + 4$

$= -x^2 + 4x - 4 + 4 = -x^2 + 4x$

**Aufgabe R08** [Verzinsung I]

Ein anfängliches Guthaben von 500 Euro wird jährlich mit einem Zinssatz von 6% verzinst. Auszahlungen werden nicht vorgenommen.

(i) Wie hoch ist das Guthaben nach 10 Jahren ?

(ii) Wie viele Jahre dauert es, bis das Guthaben auf mindestens 700 Euro angewachsen ist?

(iii) Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz sein, damit das Guthaben nach 10 Jahren mindestens 1000Euro beträgt ?

$K_0$ = Anfangsguthaben = 500 , $p$ = Zinssatz = 0,06

$n$ = Jahre , $K(n)$ = Guthaben nach $n$ Jahren

(i) $K(n) \overset{VL}{=} K_0 (1+p)^n = 500 \cdot (1{,}06)^n$

$K(10) = 500 \cdot 1{,}06^{10} \approx 895{,}12$

(ii) Gesucht ist $n$ minimal, so dass : $K(n) \geq 700$

nach Potenz auflösen ⇝ log verwenden

$K(n) \geq 700 \Leftrightarrow 500\,(1{,}06)^n \geq 700 \overset{:500}{\Leftrightarrow} \boxed{1{,}06^n \geq \frac{7}{5}}$ (*)

$\Leftrightarrow \log_{1{,}06} (1{,}06)^n \geq \log_{1{,}06}\left(\frac{7}{5}\right)$

$\Leftrightarrow n \cdot \underbrace{\log_{1{,}06}(1{,}06)}_{=1} \geq \log_{1{,}06}\left(\frac{7}{5}\right) \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}06}\left(\frac{7}{5}\right)$

$\approx 5{,}77$ also mindestens $n = 6$ Jahre

(*) alternativ $\log (1{,}06)^n \geq \log \frac{7}{5} \Rightarrow n \cdot \log 1{,}06 \geq \log\left(\frac{7}{5}\right) \Rightarrow n \geq \dfrac{\log \frac{7}{5}}{\log 1{,}06}$

$=$

$\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ ($a$ = 1,06, $b$ = 10)

(iii) $p$ gesuchte Zinssatz, dann muss gelten:

nach Basis umstellen ⇝ Wurzel

$K(10) \geq 1000 \Leftrightarrow 500\,(1+p)^{10} \geq 1000 \Leftrightarrow$

$(1+p)^{10} \geq \frac{1000}{500} = 2 \Rightarrow 1+p \geq \sqrt[10]{2}$

$\sqrt[10]{\cdots}$

$$(1+p)^{10} \geq \frac{1000}{500} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1+p \geq \sqrt[10]{2}$$

$$\Rightarrow \quad p \geq \sqrt[10]{2} - 1 \approx 0{,}072 \quad \text{also} \quad 7{,}2\,\%$$

**Aufgabe R09** [Verzinsung II]

Auf einem Sparkonto wurden vor acht Jahren ein Anfangskapital $K_0$ eingezahlt und mit einem festen Zinssatz $p$ jährlich verzinst. Auszahlungen wurden nicht vorgenommen. Zur Zeit sind 902,19 Euro auf dem Konto. In weiteren vier Jahren wird das Sparguthaben auf 956,49 Euro angewachsen sein, sofern weiterhin kein Geld abgehoben wird. Bestimmen Sie $K_0$ und $p$ und beschreiben Sie den Kapitalstand in Abängigkeit von der Zeit durch eine geeignete Funktion. Bestimmen Sie, nach wie vielen Jahren das Anfangskapital um 20% vermehrt wurde.

$$K(t) = K_0 (1+p)^t \quad \hat{=} \quad \text{Guthaben nach Zeit } t$$

$$K(8) = 902{,}19 \quad , \quad K(12) = 956{,}49$$

1) $$K_0 (1+p)^8 = 902{,}19 \quad , \quad K_0 (1+p)^{12} = 956{,}49$$

$$\Rightarrow \quad \frac{956{,}49}{902{,}19} = \frac{K_0 (1+p)^{12}}{K_0 (1+p)^8} \quad \Rightarrow \quad 1{,}0602 = (1+p)^4$$

$$\overset{\sqrt[4]{\cdot}}{\Rightarrow} \quad \sqrt[4]{1{,}0602} = 1+p \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[4]{1{,}0602} - 1 \approx 0{,}0147$$

2) $$K_0 = \frac{902{,}19}{(1+0{,}0147)^8} \approx 802{,}18$$

Also $$K(t) = 802{,}18\,(1{,}0147)^t$$

3) Gesucht $\tilde{t}$ so dass : $K(\tilde{t}) = 1{,}2 \cdot K_0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad K_0 (1+p)^{\tilde{t}} = 1{,}2 \cdot K_0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+p)^{\tilde{t}} = 1{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{1+p} (1+p)^{\tilde{t}} = \log_{1+p} (1{,}2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{t} = \log_{1{,}0147} (1{,}2) \approx 12{,}49$$

Also nach 13 Jahren

zB $x^2+4$ als Faktor ohne reelle Nullstellen

**Aufgabe R10** [Produktdarstellung]

zB $x^2+4$ als Faktor ohne reelle Nullstellen

**Aufgabe R10** [Produktdarstellung]

Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung (bzw. die reelle Produktdarstellung) von:

(i) $2x^3 + 2x^2 - 14x - 6$

*Hinweis: -3 ist eine Nullstelle* ← oder geschicktes Raten: $0, 1, 2, -1, -2, \ldots$

(ii) $(x^8 - 1)(x^2 + 8x + 16)$

HA 09, PA 11

(i) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 14x - 6 = 2(x^3 + x^2 - 7x - 3)$

$$(x^3 + x^2 - 7x - 3) : (x+3) = x^2 - 2x - 1$$
$$-(x^3 + 3x^2)$$
$$-2x^2 - 7x - 3$$
$$-(-2x^2 - 6x)$$
$$-x - 3$$
$$-x - 3$$
$$0$$

also $x^3 + x^2 - 7x - 3 = (x+3) \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{=: Q(x)}$

$Q(x) = 0 \overset{\text{p/q Formel}}{\Rightarrow} x = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 - (-1)} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\Rightarrow Q(x) = (x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2}))$

Nullstellen

**Insgesamt** $f(x) = 2(x+3)(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))$

(ii) $f(x) = (x^8 - 1)(x^2 + 8x + 16) =$ (*)

$= (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^2 + 8x + 16)$

$= (x^2 - 1)\underbrace{(x^2 + 1)}_{>0}\underbrace{(x^4 + 1)}_{>0}(x^2 + 8x + 16)$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$= (x^4)^2 - 1^2$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\underbrace{(x^2 + 8x + 16)}_{= Q(x)}$

$$= Q(x)$$

$$Q(x) = 0 \overset{PQF}{\Rightarrow} x = -4 \pm \sqrt{16-16} = -4$$

doppelte Nullstelle

$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x+4)(x+4)$$

Offenbar ist 1 Nullstelle von $x^8-1$, also:

$$(x^8-1):(x-1) = x^7$$
$$-(x^8-x^7)$$
$$\vdots$$