REP 06

Dienstag, 3. Februar 2026 07:50

Aufgabe R14 [Logarithmen II]

- Berechnen Sie:

$$\log_3(27), \quad \log_9(3).$$

- Lösen Sie nach x auf:

$$2^x = 2^{2x+1}, \quad \log_2(x) = \log_2(7x-3).$$

$\log_3(27) = x \iff 3^{\log_3 27} = 3^x \iff 27 = 3^x$

$\iff x = 3$

$\log_9(3) = x \iff 9^x = 3 \iff x = \frac{1}{2}$

$\log_9(3) = \frac{\log_3(3)}{\log_3(9)} = \frac{1}{2}$

$2^x = 2^{2x+1} \overset{\log_2(\dots)}{\iff} x = 2x+1 \iff -1 = x$

$\log_2(x) = \log_2(7x-3) \overset{2^{(\dots)}}{\iff} x = 7x - 3 \iff 6x = 3$

$\iff x = \frac{1}{2}$

Konvergenz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ $\overset{\text{Def}}{:\iff}$

es gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

„a_n ist sehr nahe bei a" $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (oder

auch $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$)

Bsp 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ konvergent, 2) $a_n := (-1)^n = \begin{cases} 1 & : n \text{ gerade} \\ -1 & : n \text{ ungerade} \end{cases}$ nicht konvergent

3) $a_n := 3n + 5$ streng monoton wachsend und nicht beschränkt

also nicht konvergent

Hausaufgabe 16 [Grenzwertsätze, Beschränktheit] *(3 + 3 Punkte)*

1 Die folgenden Folgen sind allesamt konvergent. Bestimmen Sie ihre Grenzwerte mit den Mitteln der Vorlesung. Geben Sie dazu in jedem Schritt genau an, welchen Satz bzw. welchen Unterpunkt eines Satzes Sie verwenden.

$$a_n = \frac{3n^2}{4n^2+1}, \quad b_n = \frac{n^3-3n^2+3n^7}{2n+2n^7+3n^4-3n^7}, \quad c_n = \frac{\sin(n)n^3+\cos(n)n^2+1}{\sum\limits_{k=0}^{4} n^k}$$

2 Betrachten Sie die folgenden Folgen. Erstellen Sie zu jeder Folge eine Skizze vom Graphen dieser Folge. Begründen Sie: Ist die Folge konvergent? Ist die Folge beschränkt?

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$b_n = \cos(\pi n)$$
$$c_n = \log_2(n+1).$$

zu 1

$$a_n = \frac{3n^2}{4n^2+1} = \frac{n^2\cdot 3}{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{4+\frac{1}{n^2}}, \text{ also}$$

höchste Potenz ausklammern

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4+\frac{1}{n^2}} \overset{\boxed{GWS}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 4+\frac{1}{n^2}} \overset{\boxed{GWS}}{=} \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}$$

?

$$= \frac{3}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)} \overset{\boxed{GWS}}{=} \frac{3}{4+\underbrace{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}_{=0 \text{ BSP}}\cdot\underbrace{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}_{=0 \text{ BSP}}} = \frac{3}{4}$$

$$b_n = \frac{n^3-3n^2+3n^7}{2n+2n^7+3n^4-3n^7} = \frac{n^3-3n^2+3n^7}{2n-n^7+3n^4}$$

$$= \frac{n^7\left(\frac{1}{n^4}-3\frac{1}{n^5}+3\right)}{n^7\left(2\frac{1}{n^6}-1+3\frac{1}{n^3}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-3\cdot 0+3}{2\cdot 0-1+3\cdot 0} = -3$$

höchste Potenz

$$c_n = \frac{\sin(n)\cdot n^3+\cos(n)\cdot n^2+1}{\sum\limits_{k=0}^{4} n^k} = \frac{\sin(n)\cdot n^3+\cos(n)\cdot n^2+1}{\underbrace{n^0}_{=1}+n^1+n^2+n^3+n^4}$$

NP

$-1 \le \cdot \le 1$

$$= \frac{n^4\left(\sin(n)\cdot\frac{1}{n}+\cos(n)\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0+0}{0+0+0+0+1} =$$

$$= \frac{\ldots}{n^4\left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1\right)} \longrightarrow \frac{0+0+0+0}{0+0+0+0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$\frac{1}{n^4} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

beschränkt, denn $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

beschränkt · Null = Null

Aufgabe R16 [Heron-Verfahren, Intervallhalbierung] alte Klausur aufgabe

Gesucht sind Näherungen für $\sqrt{7}$.

(i) Bestimmen Sie mit der Intervallhalbierungsmethode mit dem Startinter- vall $[2,3]$ ein Intervall der Länge von höchstens $\frac{1}{8}$, das $\sqrt{7}$ enthält.

(ii) Bestimmen mit dem Heron-Verfahren zum Startwert $x_0 = 2$ die ersten beiden Näherungen für $\sqrt{7}$. Geben Sie die Näherungen dabei jeweils als Bruch an.

<u>zu i)</u> $I_0 = [2,3]$, Mittelpunkt bestimmen: $m_0 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

Es ist $m_0^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} < 7 = \frac{28}{4}$ also $I_1 = \left[\frac{5}{2}, 3\right]$

kleiner ⟶ rechtes Teilintervall Mitte

Mittelpunkt m_1 bestimmen: $m_1 = \frac{5/2 + 6/2}{2} = \frac{11}{4}$

Es ist $m_1^2 = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{121}{16} > 7 = \frac{112}{16}$ also $I_2 = \left[\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$

größer ⟶ links

$= \left[\frac{10}{4}, \frac{11}{4}\right]$

Mittelpunkt m_2 bestimmen: $m_2 = \frac{10/4 + 11/4}{2} = \frac{21}{8}$

Es ist $m_2^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 = \frac{441}{64} < 7 = \frac{448}{64}$ also $I_3 = \left[\frac{21}{8}, \frac{22}{8}\right]$

I_3 ist Intervall der Länge $\frac{1}{8}$, das $\sqrt{7}$ enthält.

<u>zu ii)</u> $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{7}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{7}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} + \frac{7}{2}\right) = \frac{11}{4}$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{7}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4} + \frac{7}{11/4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4} + \frac{28}{11}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{121}{\ldots} + \frac{112}{\ldots}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{233}{\ldots} = \frac{233}{\ldots}$ $(\approx 2{,}64)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{121}{44} + \frac{112}{44}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{233}{44} = \frac{233}{88} \quad (\approx 2{,}64)$$

Aufgabe R17 [Schnittpunkte, Umkehrfunktion]
Vorgelegt seien die Funktionen

$$g(x) = Ax + 2c, \quad f(x) = x^2 + bx + c.$$

Beide Funktionsgraphen gehen durch den Punkt $(1, 2)$.

(i) Bestimmen Sie A, b und c derart, dass sich f und g in genau einem Punkt schneiden.

(ii) Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von f.

(iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen von f und g auf geeigneten Intervallen.

$2 = g(1) = A + 2c, \quad 2 = f(1) = 1 + b + c \quad (*)$

$f(x) = g(x) \iff Ax + 2c = x^2 + bx + c \iff$

$\iff x^2 + x(b - A) + c - 2c = 0$

$\iff x^2 + x(b-A) - c = 0$

p/q-Formel $\Longrightarrow \quad x = -\frac{b-A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-A}{2}\right)^2 + c}$ Damit genau ein Schnittpunkt x existiert: $\left(\frac{b-A}{2}\right)^2 + c = 0 \quad (\dagger)$

$(*)\quad b = 1 - c, \quad A = 2 - 2c$

$(\dagger)\quad 0 = \left(\frac{b-A}{2}\right)^2 + c = \left(\frac{1-c-(2-2c)}{2}\right)^2 + c = \left(\frac{-1+c}{2}\right)^2 + c$

$= \frac{(c-1)^2}{4} + c = \frac{c^2 - 2c + 1}{4} + c$

$\overset{\cdot 4}{\Longrightarrow} \quad 0 = c^2 - 2c + 1 + 4c = c^2 + 2c + 1 = (c+1)^2$

$\Longrightarrow \quad c = -1$

Also $b = 1 - c = 2, \quad A = 2 - 2c = 4$

Also $g(x) = 4x - 2, \quad f(x) = x^2 + 2x - 1$

ii) Scheitelpunktsform von f: mit qE:

$$f(x) = 1\cdot x^2 + \underbrace{2x}_{\hookrightarrow \frac{2}{2}=1} - 1 = x^2 + 2x + \underbrace{1 - 1}_{=0} - 1$$

qE

$$= (x+1)^2 - 1 - 1 = (x+1)^2 - 2$$

also $S(-1,-2)$ Scheitelpunkt

zu iii) $g(x) = 4x - 2 = y \Leftrightarrow 4x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$

also $g^{-1}(s) = \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}$ (oder $g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ oder

$g^{-1}(y) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$) mit $g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)$ = am Freitag machen und Skizze von g, f!