REP 07

Freitag, 6. Februar 2026 08:23

Hausaufgabe 17 [Springender Ball] *(3 + 3 Punkte)*

Ein Ball fällt aus einer Höhe von 150cm auf den Boden, springt hoch, fällt wieder, usw. Jedesmal ist die neue Höhe, die der Ball erreicht, 7/11 der alten.

1 Bestimmen Sie die Länge des Weges w, den der Ball insgesamt zurücklegt.

2 Bestimmen Sie, wie oft der Ball hochspringen muss, damit der bis dahin zurückgelegte Weg w_n sich von w um höchstens 7 mm unterscheidet.

Hinweis: zu w_n gehört auch das „letzte Fallen"

zu 1

$$w = \underbrace{150}_{\text{1. Fallen}} + \underbrace{\tfrac{7}{11}\cdot 150}_{\text{1. hochspringen}} + \underbrace{\tfrac{7}{11}\cdot 150}_{\text{2. Fallen}} + \underbrace{\left(\tfrac{7}{11}\right)^2\cdot 150}_{\text{2. hochspringen}} + \dots$$

$$= 150\left(1 + 2\cdot\underbrace{\left(\tfrac{7}{11}\right)^1}_{=q} + 2\cdot\left(\tfrac{7}{11}\right)^2 + 2\cdot\left(\tfrac{7}{11}\right)^3 + \dots\right)$$

gR $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots$, $q^0 = 1$

$$= 300\left(\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{7}{11}\right)^1 + \left(\tfrac{7}{11}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 300\left(\underbrace{-\tfrac{1}{2} + 1}_{=\frac{1}{2}} + \left(\tfrac{7}{11}\right)^1 + \left(\tfrac{7}{11}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 300\left(-\tfrac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{7}{11}\right)^k\right)$$

$q = \frac{7}{11}$

$$\overset{gR}{=} 300\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1-7/11}\right) = 675$$

zu ii) w_n = Strecke, die vor dem $(n+1)$-ten Hochspringen zurückgelegt wird, also:

$$w_n = \text{1. Fallen} + \underbrace{\text{1. hoch} + \text{2. Fallen}} + \underbrace{\text{2. hoch} + \text{3. Fallen}} + \dots + \text{n-tes Fallen}$$

$$= 150 + 300\cdot\tfrac{7}{11} + 300\cdot\left(\tfrac{7}{11}\right)^2 + \dots + 300\cdot\left(\tfrac{7}{11}\right)^{n-1}$$

$$= 150 + 300\left(\tfrac{7}{11} + \left(\tfrac{7}{11}\right)^2 + \dots + 300\cdot\left(\tfrac{7}{11}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 150 + 300\left(-1 + 1 + \tfrac{7}{11} + \left(\tfrac{7}{11}\right)^2 + \dots\right)$$

gSF: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$= 150 + 300\left(-1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\tfrac{7}{11}\right)^k\right)$$

$$= 150 + 300\left(-1 + \frac{1-\left(\frac{7}{11}\right)^n}{1-\frac{7}{11}}\right)$$

$$= \dots = 675 - 825\left(\tfrac{7}{11}\right)^n = w_n$$

$= \cdots = 675 - 825 \left(\frac{7}{11}\right)^n = w_n$

Aufgabe ist: suche n minimal, so dass: $w - w_n \leq 0{,}7$

$$\Leftrightarrow 675 - \left(675 - 825 \left(\tfrac{7}{11}\right)^n\right) \leq 0{,}7$$

$$\Leftrightarrow 825 \left(\tfrac{7}{11}\right)^n \leq 0{,}7 \quad \mid \log_{10}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(825 \cdot \left(\tfrac{7}{11}\right)^n\right) \leq \log_{10}(0{,}7)$$

losz/m

$$\Leftrightarrow \log_{10} 825 + \log_{10}\left(\tfrac{7}{11}\right)^n \leq \log_{10}(0{,}7)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \underbrace{\log_{10}\left(\tfrac{7}{11}\right)}_{<0} \leq \log_{10}(0{,}7) - \log_{10}(825)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\log_{10}(0{,}7) - \log_{10}(825)}{\log_{10}(7/11)} \approx 15{,}647$$

also $\underline{n \geq 16}$ mal hochspringen.

Hausaufgabe 15 [Radioaktiver Zerfall, Bevölkerungswachstum] *(3 + 3 Punkte)*

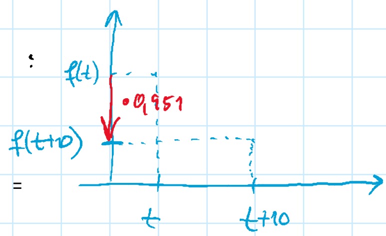
1 Bei radioaktivem Polonium zerfällt innerhalb von zehn Tagen jeweils 4,9 % der noch vorhandenen Masse. Sei $f(t)$ die zur Zeit t vorhandene Masse an radioaktivem Polonium. Zur Zeit $t = 0$ seien 50 mg Polonium vorhanden. Bestimmen Sie einen Funktionsterm für f und berechnen Sie die Menge Polonium nach 15 und nach 50 Tagen. Bestimmen Sie die Halbwertzeit. Nach wie vielen Tagen sind nur noch 5 mg Polonium vorhanden?

Hinweis: Für die Rechnungen können Sie zum Beispiel einen Taschenrechner verwenden. Sie können die Formeln aber auch „unausgerechnet" stehen lassen, sofern eine Seite der Formel nur noch mit dem Taschenrechner auszurechnen wäre.

$f(t) = t_0 \cdot a^t$ (exponentielles Wachstum)

$t_0 = f(0) = 50$. Nach 10 Tagen sind noch $100\% - 4{,}9\%$

$= 95{,}1\,\%$ übrig, also mit $\Delta t = 10$:



$$f(t + \Delta t) = 0{,}951\, f(t)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{t_0}\, a^{t+\Delta t} = 0{,}951 \cdot \cancel{t_0} \cdot a^t$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^t}\, a^{10} = 0{,}951 \cdot \cancel{a^t} \Leftrightarrow a^{10} = 0{,}951$$

$$\Rightarrow \underline{a} = \sqrt[10]{0{,}951} \approx \underline{0{,}995}$$

Also $f(t) = 50 \cdot (0{,}995)^t$

$f(15) = 50 \cdot (0{,}995)^{15}$, $f(50) = 50 \cdot (0{,}995)^{50}$

$f(15) = 50\cdot(0{,}995)^{15}$, $f(50) = 50\cdot(0{,}995)^{50}$

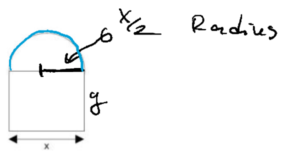
Halbwertszeit $t_{1/2} = \log_a \frac{1}{2} = \log_{0{,}995}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\left(t_2 = \log_a(2) \right)$

$f(t_5) = 5 \Leftrightarrow t_0\, a^{t_5} = 5 \overset{t_0=50}{\Leftrightarrow} (0{,}995)^{t_5} = \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow t_5 = \log_{0{,}995}\frac{1}{10} = \dots$

2 Ein Kirchenfenster hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis und einen Umfang von 6 Metern.



Bestimmen Sie die Breite x der Grundkante, so dass die Glasfläche am größten wird. Stellen Sie dazu eine geeignete Funktion auf.

1) Bogenlänge des Halbkreises: $b = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2}$

2) Fläche des Halbkreises: $f = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$

3) Bedingung an Umrandung: $6 = b + 2y + x =$

$= \frac{\pi x}{2} + 2y + x = 2y + x\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

4) Glasfläche: $F = xy + \frac{\pi x^2}{8} = (*)$

Aus 3): $2y = 6 - x\left(\pi/2 + 1\right) \Rightarrow y = 3 - x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

$(*) = x\left(3 - x\left(\pi/4 + 1/2\right)\right) + \frac{\pi x^2}{8} =: F(x)$

also $F(x) = 3x - x^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\pi x^2$

$= x^2\left(\frac{1}{8}\pi - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) + 3x$

$= x^2\left(\underbrace{-\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{2}}_{<0}\right) + 3x = (*)$

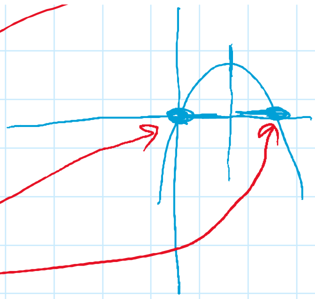
Nun F maximieren über Scheitelpunktsform:

$(*) = x\left(\underbrace{x\left(-1/8\,\pi - \frac{1}{2}\right) + 3}_{=0}\right)$

" Trick wenn $f(x) = ax^2 + bx$ dann Scheitelstelle über NST möglich "

$$(*) = x\left(\underbrace{x\left(-\tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{2}\right)}_{=0} + 3\right)$$

"über NST möglich"



also NST von F sind:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{-3}{-\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{2}}$$

Also ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts:

$$\frac{0 + \frac{-3}{-\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{2}}}{2} = \cdots = \frac{12}{4+\pi}$$