Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2025/2026

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 01

Abgabe: bis Donnerstag, den 23.10.2025 um 14 Uhr

Hausaufgabe 01 [Vollständige Induktion]

1 Geben Sie alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ an, für die $2^n > n^2$ gilt.

Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

2 Beweisen Sie die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

Durch $n \in \mathbb{N}$ Geraden in allgemeiner Lage in einer Ebene wird die Ebene in

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Teile zerlegt.

Hausaufgabe 02 [Aussagenlogik]

Entscheiden Sie begründet ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Wenn Sie der Meinung sind, dass eine Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1 Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x > 5 \Rightarrow x^2 > 25$.

2 Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x < 3 \Leftrightarrow 2x < 6$.

3 Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x > 5 \Leftrightarrow x^2 > 25$.

4 Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x = 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 0$.

5 Für alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a > b$ und $b > c \Rightarrow a + b > c$.

6 Für jede Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0$.

Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2025/2026

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 02

Abgabe: bis Donnerstag, den 30.10.2025 um 14 Uhr

Hausaufgabe 03 [Abbildungen]

Es seien $f : A \to B$ eine Abbildung, A_1, A_2 Teilmengen von A und B_1, B_2 Teilmengen von B. Das *Bild* $f(A_i)$ *von* $A_i, i \in \{1,2\}$ *unter* f ist definiert durch

$$f(A_i) := \{f(a) \,|\, a \in A_i\}$$

und das *Urbild* $f^{-1}(B_i)$ *von* $B_i, i \in \{1,2\}$ *unter* f durch

$$f^{-1}(B_i) := \{a \in A \,|\, f(a) \in B_i\}.$$

1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie für $A = [-3, 1]$ das Bild $f(A)$ und für $B = [-1, 1)$ das Urbild $f^{-1}(B)$.

2 Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

b $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass in **b** nicht immer Gleichheit gilt.

Hausaufgabe 04

Beschreiben Sie die folgenden funktionalen Zusammenhänge jeweils durch eine geeignete Funktion, indem Sie einen geeigneten Funktionsterm angeben. Führen Sie ggf. geeignete Parameter (z.B. Preis pro Einheit etc.) ein. Entscheiden Sie begründet, in welchen Fällen sich lineare, in welchen Fällen sich proportionale Zusammenhänge ergeben.

a Strompreis mit Grundpreis und Arbeitspreis in Abhängigkeit vom Verbrauch,

b Fläche eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge,

c Zeitdauer zum Zurücklegen einer vorgegebenen Strecke in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit,

d Preis in Abhängigkeit von der Warenmenge,

e Preis in Abhängigkeit von der Warenmenge, wenn ab einer gewissen Warenmenge ein Rabatt von 5% gegeben wird.

f Dauer einer Arbeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Mitarbeitenden.

Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2025/2026

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 03

Abgabe: bis Donnerstag, den 06.11.2025 um 14 Uhr

Hausaufgabe 05 [Geradengleichungen] *(1+3+2 Punkte)*

a Geben Sie die Umkehrfunktion von

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2x + 5$$

an und zeigen Sie mit Hilfe der Definition 1.4.25, dass es sich um die Umkehrfunktion von s handelt.

b Gegeben seien zwei unbekannte, aber feste reelle Zahlen a und b. Stellen Sie die Gleichungen für die folgenden linearen Funktionen f, g und h auf:

1 Der Graph von f läuft durch die Punkte $P(-2;3)$ und $Q(3;-1)$.

2 g ist eine proportionale Funktion, deren Graph durch den Punkt $R(2,t)$ (Hier müssen Sie den Funktionsterm von g in Abhängigkeit von der unbekannten Zahl t angeben!)

3 Der Graph von h hat die Steigung a und verläuft durch den Punkt $S(1;4)$.

Verwenden Sie bei **1** und **3** die Formeln aus der Vorlesung und benennen Sie diese!

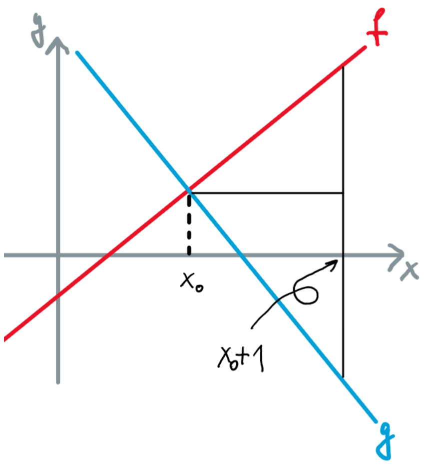
c Bestimmen Sie a aus Aufgabenteil **b** so, dass die Graphen von f und h keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Bestimmen Sie mit diesem a die gemeinsamen Punkte von h und g in Abhängigkeit von b.

Hausaufgabe 06 [Senkrechte Geraden] *(6 Punkte)*
Gegeben sind zwei lineare Funktionen f und g mit den Funktionstermen

$$f(x) = a_1x + b_1 \quad \text{und} \quad g(x) = a_2x + b_2.$$

Zeigen Sie durch Betrachtung der Steigungsdreiecke, dass sich ihre Graphen genau dann im rechten Winkel schneiden, wenn $a_1 \cdot a_2 = -1$ gilt.

Verwenden Sie für den Beweis folgende Skizze, indem Sie mit dort abgebildeten geeigneten Strecken und Winkeln arbeiten.



Hinweis: Für den Beweis dürfen Sie den Satz von Pythagoras (Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat ist) ohne Beweis benutzen

Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2025/2026

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 04

Abgabe: bis Donnerstag, den 13.11.2025 um 14 Uhr

Hausaufgabe 07 [Geschwindigkeiten] *(3+3 Punkte)*

a Aristoteles beschreibt den Wettlauf von Achilles und der Schildkröte folgendermaßen (aus Sicht der Schildkröte): „Achilles läuft zwar zehnmal so schnell wie ich, aber wenn er mir nur 100m Vorsprung gibt, wird er mich nie einholen! Denn bis Achilles die 100m gelaufen ist, bin ich 10m weiter gelaufen, und bis Achilles die 10m gelaufen ist, bin ich schon wieder 1m voran gekommen, und bis Achilles diesen 1m aufgeholt hat, bin ich schon wieder..., und so fort. Ich werde also stets einen Vorsprung vor Achilles behalten.“

Stellen Sie für Achilles und die Schildkröte jeweils eine Gleichung für den Ort in Abhängigkeit von der Zeit auf und zeichnen Sie ein gemeinsames Zeit-Ort-Diagramm. Erläutern Sie, wie man die Argumentation der Schildkröte mithilfe der aufgestellten linearen Funktionen widerlegen könnte.

Hinweis: Setzen Sie für die Geschwindigkeit der Schildkröte einen beliebigen Wert v_S an!

b Sie sitzen in einem IC und schauen aus dem Fenster. Auf dem Nebengleis kommt ein 500 Meter langer ICE mit 200 km/h entgegen. Der IC fährt mit durchschnittlich 100 km/h. Wie lange sehen Sie den ICE an sich vorbei fahren?

Verwenden Sie in Ihrer Lösung Funktionen für Wegstrecke und Zeit der beiden Züge.

Hausaufgabe 08 [Geradengleichungen suchen] *(3 + 3 Punkte)*

a Vorgelegt seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = -3x + 3.$$

Finden Sie eine Folge von linearen Skalierungen, die mindestens EIN horizontales Verschieben enthält, so dass g gemäß dieser Folge aus f hervorgeht. Geben Sie die Funktionen zu den Skalierungen und wie diese auseinander hervorgehen wie in Einschub 2.10.6 vorgeführt an.

b Vorgelegt seien die Funktionen

$$f(x) = ax + b \quad \text{durch den Punkt } (1, -1) \quad \text{und} \quad g(x) = -5x - 10.$$

Bestimmen Sie a und b derart, dass die Umkehrfunktion von f senkrecht zu g steht.

Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2025/2026

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 05

Abgabe: bis Donnerstag, den 20.11.2025 um 14 Uhr

Hausaufgabe 09 [Quadratische Funktionen I] *(2+4 Punkte)*

a Vorgelegt seien die Funktionen

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 6 \quad \text{und} \quad g(x) = \tfrac{2}{3}x + 8.$$

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g oder zeigen Sie, dass es keine gemeinsamen Punkte gibt.

b Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform und den Scheitelpunkt der Funktion

$$f(x) = -0,25x^2 - 2x + 1,5.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen und die Linearfaktorzerlegung von f.

Hinweis: Mit „Bestimmen" ist gemeint, dass Sie die Formeln der Vorlesung verwenden (und erklären welche Formel Sie wie angewendet haben) und/oder eine nachvollziehbare Rechnung durchführen.

Hausaufgabe 10 [Quadratische Funktionen II] *(2 + 1 + 2 Punkte)*
Bestimmen Sie jeweils den Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ einer quadratischen Funktion, deren Graph die folgende Eigenschaft hat:

a Der Scheitelpunkt liegt in $(-2, -1)$ und der Graph verläuft durch $(-1, 1)$.

b Der Graph ist aus der Normalparabel durch folgende Manipulationen hervorgegangen:

(i) Verschiebung um 2 Einheiten entgegen der x-Achsenrichtung
(ii) Verschiebung um 1 Einheit in y-Achsenrichtung
(iii) Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Achsenrichtung mit dem Faktor 2

c Der Graph geht durch den Punkt $(1, 1)$ und besitzt die Nullstellen -2 und 3.

Hinweis: Mit „Bestimmen" ist gemeint, dass Sie a, b und c angeben, indem Sie die Formeln der Vorlesung verwenden (und erklären welche Formel Sie wie angewendet haben) und/oder eine nachvollziehbare Rechnung durchführen.

Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2025/2026

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 06

Abgabe: bis Donnerstag, den 27.11.2025 um 14 Uhr

Hinweis: Differentialrechnung dürfen Sie hier bei allen Aufgaben nicht benutzen.

Hausaufgabe 11 [Marktanalyse und Kirchenfenster] *(3 + 3 Punkte)*

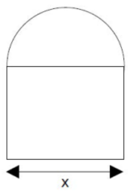
1 Eine Elektronikfirma verkauft monatlich 1000 Stück eines Bauteils zu einem Stückpreis von 10 Euro. Eine Marktanalyse hat ergeben, dass sich der Absatz bei einer Preissenkung von 0,10 Euro pro Stück um monatlich 20 Stück erhöhen würde.

(i) Wir nehmen an, dass der Absatz eine lineare Funktion in Abhängigkeit vom Preis ist. Bestimmen Sie diese Funktion.

(ii) Bestimmen Sie die Einnahmen des Unternehmens als eine Funktion in Abhängigkeit vom Preis.

(iii) Bestimmen Sie den Preis des Bauteils, bei dem die Einnahmen des Unternehmens am größten werden.

2 Ein Kirchenfenster hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis und einen Umfang von 6 Metern.



Bestimmen Sie die Breite x der Grundkante, so dass die Glasfläche am größten wird. Stellen Sie dazu eine geeignete Funktion auf.

Hausaufgabe 12 [Werfen] *(3 + 3 Punkte)*

1 Von einem Haus wird aus 12 m Höhe ein Gegenstand in horizontaler Richtung mit einer Geschwindigkeit von 25 m/s abgeworfen. Bestimmen Sie, wie weit entfernt vom Haus der Gegenstand auf dem Boden landet.

Modellieren Sie wie in Einschub 3.5.9. und verwenden Sie die dort angegebenen Formeln.

2 Ein Ball wird mit 30 m/s unter einem Winkel von 35 Grad schräg nach oben geworfen. Bestimmen Sie,

(i) nach welcher Zeit der Ball seinen höchsten Punkt erreicht

(ii) und wie hoch der Ball dann ist.

Modellieren Sie wie in Einschub 3.5.9. und verwenden Sie die dort angegebenen Formeln.