Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2026/2027

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 04

Entschuldigung für die ruckelige Formatierung

Hausaufgabe 1

Teil (a) Nachweis der Antiproportionalität

Zu zeigen: Für ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{k}{x}$ antiproportional, d. h. für alle $r, x \in (0, \infty)$ gilt:

$$f(r \cdot x) = \frac{f(x)}{r}$$

Beweis: Wir setzen den Ausdruck $r \cdot x$ direkt in die Funktionsvorschrift ein:

$$f(r \cdot x) = \frac{k}{r \cdot x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{k}{x} = \frac{\frac{k}{x}}{r} = \frac{f(x)}{r}$$

Damit ist die Bedingung für alle $r, x \in (0, \infty)$ erfüllt, und die Funktion f ist antiproportional.

Teil (b) Zusammenfassung als Äquivalenzaussage

$$\forall f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : \left(f \text{ ist antiproportional} \iff \exists\, k \in \mathbb{R}\ \forall x \in (0, \infty) : f(x) = \frac{k}{x} \right)$$

Teil (c) Untersuchung der Additivität

Entscheidung: Nein, die Regel $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ gilt **nicht** für jede antiproportionale Funktion.

Begründung (Gegenbeispiel): Wählen wir die antiproportionale Funktion mit $k = 1$, also $f(x) = \frac{1}{x}$, sowie $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$:

- **Linke Seite:** $f(1 + 1) = f(2) = \frac{1}{2}$
- **Rechte Seite:** $f(1) + f(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$

Da $\frac{1}{2} \neq 2$, gilt die Gleichung im Allgemeinen nicht.

Gibt es antiproportionale Funktionen, für die diese Regel gilt? Ja, für die **Nullfunktion** (Spezialfall $k = 0$ mit $f(x) = \frac{0}{x} = 0$):

- **Linke Seite:** $f(x_1 + x_2) = 0$
- **Rechte Seite:** $f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0$

Hier gilt $0 = 0$ für alle $x_1, x_2 \in (0, \infty)$. Dies ist auch die einzige antiproportionale Funktion, die diese Regel erfüllt.

Hausaufgabe 2a

1. Aufstellen der Streckenfunktionen $s(t)$

Wir messen die Entfernung s in Kilometern von Münster aus ($s = 0$ km) in Abhängigkeit von der Fahrzeit t in Stunden ab 8:00 Uhr:

- **Frau Akin (A):** Startet in Münster ($s_0 = 0$ km) mit $v_A = 120$ km/h.

$$s_A(t) = 120 \cdot t$$

- **Herr Brandt (B):** Startet in Bielefeld ($s_0 = 80$ km von Münster entfernt) mit $v_B = 80$ km/h.

$$s_B(t) = 80 + 80 \cdot t$$

Ziel Berlin: Die Gesamtstrecke von Münster nach Berlin beträgt $80 + 400 = 480$ km.

---

2. Wer kommt zuerst in Berlin an?
Wir berechnen die Fahrzeit t bis zum Ziel $s = 480$ km:

- **Frau Akin:**

$$120 \cdot t = 480 \implies t = \frac{480}{120} = 4 \text{ Stunden}$$

  Ankunft um $8:00 + 4 = 12:00$ Uhr.

- **Herr Brandt:**

$$80 + 80 \cdot t = 480 \implies 80 \cdot t = 400 \implies t = \frac{400}{80} = 5 \text{ Stunden}$$

  Ankunft um $8:00 + 5 = 13:00$ Uhr.

Antwort: Frau Akin kommt zuerst in Berlin an (um 12:00 Uhr, 1 Stunde vor Herrn Brandt).

---

3. Überholen vor Berlin (Wann und wo?)
Frau Akin überholt Herrn Brandt, wenn $s_A(t) = s_B(t)$:

$$120 \cdot t = 80 + 80 \cdot t$$

Subtraktion von $80 \cdot t$:

$$40 \cdot t = 80 \implies t = \frac{80}{40} = 2 \text{ Stunden}$$

- **Wann?** Um $8:00 + 2 = 10:00$ Uhr.
- **Wo?** $s_A(2) = 120 \cdot 2 = 240$ km von Münster entfernt ($240 - 80 = 160$ km hinter Bielefeld).

Da $240 < 480$ km ist, findet das Überholen vor Berlin statt.

Zusammenfassung:

- Frau Akin kommt zuerst an (um 12:00 Uhr).
- Frau Akin überholt Herrn Brandt um 10:00 Uhr bei Kilometer 240 von Münster (160 km hinter Bielefeld).

Hausaufgabe 2b

Aussage: „Die Graphen von zwei verschiedenen linearen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schneiden sich immer."

Bewertung: Die Aussage ist **falsch**.
Widerlegung durch ein Gegenbeispiel:

Betrachten wir die zwei verschiedenen linearen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x + 3$$

Ein Schnittpunkt müsste die Gleichung $f(x) = g(x)$ erfüllen:

$$2x + 1 = 2x + 3$$

Subtraktion von $2x$ auf beiden Seiten liefert:

$$1 = 3$$

Dies ist ein Widerspruch. Folglich besitzen die beiden Graphen keinen Schnittpunkt.

Kriterium

Die Graphen von zwei verschiedenen linearen Funktionen $f(x) = m_1x + h_1$ und $g(x) = m_2x + h_2$ schneiden sich **genau dann nicht**, wenn gilt:

$$m_1 = m_2 \quad \text{und} \quad h_1 \neq h_2$$

Begründung

Ein Schnittpunkt (x, y) liegt vor, wenn $f(x) = g(x)$ gilt:

$$m_1x + h_1 = m_2x + h_2 \iff (m_1 - m_2)x = h_2 - h_1$$

Wir unterscheiden zwei Fälle bezüglich der Steigungen:

1. **Fall $m_1 \neq m_2$:** Die Gleichung lässt sich eindeutig nach x auflösen:

   $$x = \frac{h_2 - h_1}{m_1 - m_2}$$

   In diesem Fall besitzen die Graphen stets genau einen Schnittpunkt.

2. **Fall $m_1 = m_2$:** Die Gleichung vereinfacht sich zu:

   $$0 \cdot x = h_2 - h_1 \iff 0 = h_2 - h_1$$

   - Ist $h_1 = h_2$, so sind die Funktionen identisch ($f = g$), was laut Aufgabenstellung ausgeschlossen ist („zwei *verschiedene* Funktionen“).
   - Ist $h_1 \neq h_2$, so ist $h_2 - h_1 \neq 0$. Die Gleichung $0 = h_2 - h_1$ ist für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllbar.

Fazit: Zwei verschiedene lineare Funktionen schneiden sich genau dann nicht, wenn ihre Steigungen gleich sind ($m_1 = m_2$) und ihre y-Achsenabschnitte verschieden sind ($h_1 \neq h_2$). Die Graphen verlaufen dann echt parallel zueinander.

Hausaufgabe 3

Teil (i)

- **Gegebene Funktion:** $f(x) = x$
- **Funktionsgleichung von g:**

  $$g(x) = x + 2$$

- **Beschreibung der Verschiebung:** Der Graph von f wird um 2 Einheiten nach **oben** verschoben (alternativ: um 2 Einheiten nach **links**).

Teil (ii)

- **Gegebene Funktion:** $f(x) = 2x$
- **Funktionsgleichung von g:**
$$g(x) = 2x - 3$$
- **Beschreibung der Verschiebung:** Der Graph von f wird um 3 Einheiten nach **unten** verschoben (alternativ: um 1,5 Einheiten nach **rechts**).

Teil (iii)

- **Gegebene Funktion:** $f(x) = -x + 1$
- **Funktionsgleichung von g:**
$$g(x) = -x + 3$$
- **Beschreibung der Verschiebung:** Der Graph von f wird um 2 Einheiten nach **oben** verschoben (alternativ: um 2 Einheiten nach **rechts**).

Teil (iv)

- **Gegebene Funktion:** $f(x) = \frac{1}{2}x$
- **Funktionsgleichung von g:**
$$g(x) = \frac{1}{2}x - 1$$
- **Beschreibung der Verschiebung:** Der Graph von f wird um 1 Einheit nach **unten** verschoben (alternativ: um 2 Einheiten nach **rechts**).

Teil (v)

- **Gegebene Funktion:** $f(x) = 3x$
- **Funktionsgleichung von g:**
$$g(x) = 3x + 3$$
- **Beschreibung der Verschiebung:** Der Graph von f wird um 3 Einheiten nach **oben** verschoben (alternativ: um 1 Einheit nach **links**).

Hausaufgabe 4

Es sei X die Menge aller linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = m_f x + h_f$. Auf X ist die Relation $\sim$ definiert durch:

$$f \sim g \iff \text{Die Graphen von } f \text{ und } g \text{ haben genau einen Schnittpunkt.}$$

Aus Aufgabenteil 2 (b) folgt, dass zwei lineare Funktionen genau dann einen Schnittpunkt besitzen, wenn ihre Steigungen unterschiedlich sind ($m_f \neq m_g$). Somit gilt:

$$f \sim g \iff m_f \neq m_g$$

(a) Reflexivität

Entscheidung: Die Relation ist **nicht reflexiv**.

Begründung (Gegenbeispiel): Betrachten wir die Funktion $f(x) = 1 \cdot x + 0$. Es gilt $m_f = 1$. Da $m_f = m_f$ ist $(1 = 1)$, gilt $m_f \neq m_f$ nicht. Der Graph einer Funktion f schneidet sich niemals in genau *einem* Punkt mit sich selbst, da alle Punkte identisch sind. Somit gilt $f \not\sim f$.

(b) Symmetrie

Entscheidung: Die Relation ist **symmetrisch**.

Begründung: Es seien $f, g \in X$ mit $f \sim g$. Dann gilt:

$$f \sim g \implies m_f \neq m_g \implies m_g \neq m_f \implies g \sim f$$

Geometrisch: Schneidet der Graph von f den Graphen von g in genau einem Punkt, so schneidet auch der Graph von g den Graphen von f in genau demselben Punkt.

(c) Transitivität

Entscheidung: Die Relation ist **nicht transitiv**.

Begründung (Gegenbeispiel): Betrachten wir die drei linearen Funktionen:

- $f(x) = 1 \cdot x + 0 \implies m_f = 1$
- $g(x) = 2 \cdot x + 0 \implies m_g = 2$
- $h(x) = 1 \cdot x + 3 \implies m_h = 1$

Untersuchung der Paare:

1. $f \sim g$, da $m_f = 1 \neq 2 = m_g$ (genau 1 Schnittpunkt).
2. $g \sim h$, da $m_g = 2 \neq 1 = m_h$ (genau 1 Schnittpunkt).
3. Für f und h gilt $m_f = 1 = m_h$. Da $h_f = 0 \neq 3 = h_h$, verlaufen f und h echt parallel und besitzen keinen Schnittpunkt.

Es gilt also $f \sim g$ und $g \sim h$, aber $f \not\sim h$.

Teil (d) Äquivalenzrelation

Entscheidung: Die Relation $\sim$ ist **keine Äquivalenzrelation**.

Begründung: Eine Äquivalenzrelation muss reflexiv, symmetrisch und transitiv sein. Da $\sim$ weder reflexiv noch transitiv ist, handelt es sich nicht um eine Äquivalenzrelation.