Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2026/2027

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 02

Hausaufgabe 1a

Es seien $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ zwei endliche Mengen mit Mächtigkeiten $|A| = m$ und $|B| = n$. Das kartesische Produkt $A \times B$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare:

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n\}$$

Ordnet man alle Elemente von $A \times B$ in einer Tabelle an, wobei die i-te Zeile dem Element $a_i \in A$ und die j-te Spalte dem Element $b_j \in B$ entspricht, ergibt sich folgendes Schema:

	b_1	b_2	$\ldots$	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\ldots$	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\ldots$	(a_2, b_n)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	$\ldots$	(a_m, b_n)

Abzählen der Elemente:

1. Jede der m Zeilen enthält genau n Paare, da jedem a_i genau die n Elemente $b_1, \ldots, b_n$ zugeordnet werden.
2. Da die Elemente a_i untereinander paarweise verschieden sind und die Elemente b_j ebenfalls paarweise verschieden sind, sind alle $m \cdot n$ Einträge in der Tabelle voneinander unterschiedlich.

Die Gesamtzahl der Elemente in $A \times B$ entspricht somit der Anzahl aller Tabelleneinträge:

$$|A \times B| = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m \text{ Zeilen}} = m \cdot n = |A| \cdot |B|$$

Hausaufgabe 1b

Es sei H die Menge der Hauptgerichte mit $|H| = 2$ und B die Menge der Beilagen mit $|B| = 5$. *1. Beschreibung als kartesisches Produkt*

Ein Menü besteht aus einem Paar (h, b), wobei $h \in H$ ein Hauptgericht und $b \in B$ eine Beilage ist.
Die Menge M aller möglichen Menüs lässt sich daher als kartesisches Produkt der Mengen H und B darstellen:

$$M = H \times B = \{(h, b) \mid h \in H,\, b \in B\}$$

2. Bestimmung der Anzahl der Menüs

Die Anzahl aller verschiedenen Menüs entspricht der Mächtigkeit $|M| = |H \times B|$.
Mit der Formel für die Mächtigkeit eines kartesischen Produkts ($|A \times B| = |A| \cdot |B|$) ergibt sich:

$$|M| = |H \times B| = |H| \cdot |B| = 2 \cdot 5 = 10$$

Es gibt somit *10 verschiedene Menüs*.

Hausaufgabe 2a

Es sei $\sim$ eine Relation auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, definiert durch:

$$a \sim b \iff 3 \mid (a-b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = 3k$$

Um zu zeigen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, müssen wir die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nachweisen:

1. Reflexivität

- **Zu zeigen:** $a \sim a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.
- **Beweis:** Wir betrachten die Differenz von a mit sich selbst:

  $$a - a = 0 = 3 \cdot 0$$

  Da 0 durch 3 teilbar ist (mit dem Faktor $0 \in \mathbb{Z}$), gilt $a \sim a$. Die Relation ist somit reflexiv.

2. Symmetrie

- **Zu zeigen:** Wenn $a \sim b$, dann auch $b \sim a$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.
- **Beweis:** Es gelte $a \sim b$. Das bedeutet nach Definition, dass $a - b = 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit -1, erhalten wir:

  $$b - a = -(a-b) = -(3k) = 3 \cdot (-k)$$

  Da mit k auch $-k$ in $\mathbb{Z}$ liegt, ist $b-a$ ebenfalls durch 3 teilbar. Folglich gilt $b \sim a$, womit die Relation symmetrisch ist.

3. Transitivität

- **Zu zeigen:** Wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, dann $a \sim c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- **Beweis:** Es gelte $a \sim b$ und $b \sim c$. Dies bedeutet:

  $$a - b = 3k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$
  $$b - c = 3l \quad \text{für ein } l \in \mathbb{Z}$$

  Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir:

  $$(a-b) + (b-c) = 3k + 3l \implies a - c = 3(k+l)$$

  Da die Summe ganzer Zahlen wieder eine ganze Zahl ist ($k + l \in \mathbb{Z}$), ist $a - c$ durch 3 teilbar. Damit gilt $a \sim c$. Die Relation ist also transitiv.

Fazit
Da $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, handelt es sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation.

Hausaufgabe 2b
Die Äquivalenzklasse $[a]$ eines Elements $a \in \mathbb{Z}$ bezüglich der Relation $\sim$ enthält alle ganzen Zahlen b, die denselben Rest bei der Division durch 3 lassen wie a.
Es gibt genau drei verschiedene Äquivalenzklassen (entsprechend den möglichen Resten $0, 1, 2$):

1. Äquivalenzklasse $[0]$ (Rest 0)

Die Menge aller ganzen Zahlen, die ohne Rest durch 3 teilbar sind:

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 0\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Elemente (7 Beispiele):

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

2. Äquivalenzklasse [1] (Rest 1)

Die Menge aller ganzen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen:

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 1\} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Elemente (7 Beispiele):

$$[1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$

3. Äquivalenzklasse [2] (Rest 2)

Die Menge aller ganzen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen:

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 2\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Elemente (7 Beispiele):

$$[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

Hausaufgabe 3

Entscheidung, ob durch die jeweilige Vorschrift eine Abbildung gegeben ist:

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

- **Entscheidung:** Keine Abbildung.
- **Begründung:** Für $x = 0 \in \mathbb{R}$ ist der Term $\frac{1}{0}$ nicht definiert. Es existiert somit kein Funktionswert $f_1(0) \in \mathbb{R}$. Da eine Abbildung jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zuordnen muss, ist f_1 keine Abbildung.

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

- **Entscheidung:** Eine Abbildung.
- **Begründung:** Der kritische Wert $x = 0$ wurde aus der Definitionsmenge ausgeschlossen. Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ ist $\frac{1}{x}$ wohldefiniert und eine eindeutige reelle Zahl.

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$

- **Entscheidung:** Keine Abbildung.
- **Begründung:** Für negative Zahlen (z. B. $x = -1 \in \mathbb{R}$) ist die reelle Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ nicht in der Zielmenge $\mathbb{R}$ definiert. Negativen Zahlen wird kein Wert zugeordnet.

(iv) $f_4 : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$

- **Entscheidung:** Eine Abbildung.
- **Begründung:** Die Definitionsmenge beschränkt sich auf alle nicht-negativen reellen Zahlen ($x \geq 0$). Für jedes $x \in [0, \infty)$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{x} \geq 0$ wohldefiniert und eindeutig in $\mathbb{R}$ enthalten.

(v) $f_5 : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2 - 1$

- **Entscheidung:** Keine Abbildung.
- **Begründung:** Für $x = 0 \in \mathbb{R}$ gilt $f_5(0) = 0^2 - 1 = -1$. Der Wert -1 liegt jedoch nicht in der vorgegebenen Zielmenge $[0, \infty)$. Die Zuordnung verlässt somit den Zielbereich.

(vi) $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \frac{n}{2}$

- **Entscheidung:** Keine Abbildung.
- **Begründung:** Für alle ungeraden natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ (z. B. $n = 1$) ist der Wert $\frac{n}{2}$ keine natürliche Zahl ($\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$). Damit besitzen ungerade Zahlen kein Bild in der Zielmenge $\mathbb{N}$.

(vii) $f_7 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |n|$ (mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)

- **Entscheidung:** Keine Abbildung.
- **Begründung:** Für $n = 0 \in \mathbb{Z}$ ist $f_7(0) = |0| = 0$. Da $0 \notin \mathbb{N}$ (unter der Annahme, dass die natürlichen Zahlen bei 1 beginnen), besitzt die Zahl 0 kein Bild in der Zielmenge.

Hausaufgabe 4

Eine Funktion $f : A \to B$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, wenn gilt:

1. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$, und
2. $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in B$.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x + 5$

- **Entscheidung:** Ja, f besitzt eine Umkehrfunktion.
- **Begründung:** Wir setzen $f^{-1}(y) = \frac{5-y}{2}$. Damit überprüfen wir die beiden Bedingungen:
  1. Für alle $x \in \mathbb{R}$:
  $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-2x + 5) = \frac{5 - (-2x + 5)}{2} = \frac{2x}{2} = x$$
  2. Für alle $y \in \mathbb{R}$:
  $$f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{5-y}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{5-y}{2}\right) + 5 = -(5 - y) + 5 = y$$
- **Umkehrfunktion:**
  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{5-x}{2}$$
  Definitionsbereich: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, Wertebereich: $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

- **Entscheidung:** Nein, g besitzt keine Umkehrfunktion.
- **Begründung:** Es kann keine Funktion $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existieren, die beide Bedingungen erfüllt:
  1. Wäre g^{-1} eine Umkehrfunktion, müsste $g^{-1}(g(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Für $x = -2$ und $x = 2$ ist jedoch $g(-2) = 4$ und $g(2) = 4$. Damit müsste gleichzeitig $g^{-1}(4) = -2$ und $g^{-1}(4) = 2$ gelten, was für eine Funktion nicht möglich ist (Eindeutigkeit des Funktionswertes ist verletzt).
  2. Für $y = -1 \in \mathbb{R}$ existiert zudem kein Wert in $\mathbb{R}$ mit $g(g^{-1}(-1)) = -1$, da $g(x) = x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) $h : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2$

- **Entscheidung:** Ja, h besitzt eine Umkehrfunktion.
- **Begründung:** Wir setzen $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Für alle $x, y \in [0, \infty)$ überprüfen wir die Bedingungen:
  1. Für alle $x \in [0, \infty)$:
  $$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad (\text{da } x \geq 0)$$

2. Für alle $y \in [0, \infty)$:

$$h\left(h^{-1}(y)\right) = h\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$$

- **Umkehrfunktion:**

$$h^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad h^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Definitionsbereich: $D_{h^{-1}} = [0, \infty)$, Wertebereich: $W_{h^{-1}} = [0, \infty)$.