Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing
Wintersemester 2026/2027

Anwendungen der Mathematik ☺ Übung 02

Hausaufgabe 1
Entscheiden Sie, ob durch die jeweilige Vorschrift eine Abbildung gegeben ist, und begründen Sie Ihre Antwort. Falls keine Abbildung vorliegt, ändern Sie den Definitionsbereich oder den Wertebereich so ab, dass eine Abbildung entsteht. Achten Sie auf Definitions- und Wertebereich.

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to (0,\infty), \quad x \mapsto x^2$

(iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n-3$

(iv) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+5$

Hinweis: Wie im Skript ist $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ und $(0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Eine Zuordnung $f : A \to B$ ist genau dann eine **Abbildung**, wenn jedem Element $x \in A$ aus dem Definitionsbereich **genau ein** Element $y \in B$ aus dem Wertebereich (Zielmenge) zugeordnet wird.

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$

- **Entscheidung: Nein**, es liegt **keine** Abbildung vor.
- **Begründung:** Der Nenner des Bruchs wird für $x = 2$ und $x = -2$ Null:

$$2^2 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad (-2)^2 - 4 = 0.$$

  Da die Division durch 0 in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist, existiert für die Elemente $x \in \{-2,2\} \subset \mathbb{R}$ kein Bildwert in der Zielmenge $\mathbb{R}$.
- **Anpassung (Definitionsbereich einschränken):**

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$$

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to (0,\infty), \quad x \mapsto x^2$

- **Entscheidung: Nein**, es liegt **keine** Abbildung vor.
- **Begründung:** Für das Element $x = 0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_2(0) = 0^2 = 0.$$

  Das Bild 0 liegt jedoch nicht im angegebenen Wertebereich $(0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Somit wird dem Element 0 kein Element der Zielmenge zugeordnet.
- **Anpassung:** Es gibt zwei Möglichkeiten zur Korrektur:
  1. *Definitionsbereich anpassen:*

$$\tilde{f}_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0,\infty), \quad x \mapsto x^2$$

  2. *Wertebereich anpassen:*

$$\hat{f}_2 : \mathbb{R} \to [0,\infty), \quad x \mapsto x^2$$

(iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n - 3$

- **Entscheidung: Nein**, es liegt **keine** Abbildung vor.
- **Begründung:** Da $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, ergeben sich für $n = 1, 2, 3 \in \mathbb{N}$ die folgenden Werte:

$$f_3(1) = 1 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}, \quad f_3(2) = 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}, \quad f_3(3) = 3 - 3 = 0 \notin \mathbb{N}.$$

  Den Elementen $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$ wird somit kein Wert in der Zielmenge $\mathbb{N}$ zugeordnet.

- **Anpassung:** Auch hier gibt es zwei Korrekturmöglichkeiten:

  1. *Definitionsbereich anpassen:*

$$\tilde{f}_3 : \{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n - 3$$

  2. *Wertebereich anpassen:*

$$\hat{f}_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto n - 3$$

(iv) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + 5$

- **Entscheidung: Ja**, es liegt eine **Abbildung** vor.
- **Begründung:** Für jedes $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist der Wert $n + 5 \geq 6$ eine eindeutig bestimmte Zahl, die ebenfalls stets in $\mathbb{N}$ liegt. Jedem Element der Definitionsmenge wird somit genau ein Element der Zielmenge zugeordnet.

Hausaufgabe 2a

Die folgenden Abbildungen sind explizit durch ihre Werte gegeben. Finden Sie jeweils eine passende Funktionsvorschrift und schreiben Sie die Abbildung in der Form $f : A \to B,\ x \mapsto \ldots$ auf.

- $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N} :\ 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 7,\ 4 \mapsto 9$
  - *Überlegung:* Die Funktionswerte $3, 5, 7, 9$ steigen linear an. Für $x = 1$ ergibt sich $2 \cdot 1 + 1 = 3$.
  - *Vorschrift:*

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto 2x + 1$$

- $g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}_0 :\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 9$
  - *Überlegung:* Die Werte entsprechen den Quadratzahlen der Eingaben ($0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9$).
  - *Vorschrift:*

$$g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto x^2$$

- $h : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Q} :\ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto \frac{1}{2},\ 3 \mapsto \frac{1}{3},\ 4 \mapsto \frac{1}{4}$
  - *Überlegung:* Jeder Wert entspricht dem Kehrwert des Arguments x.
  - *Vorschrift:*

$$h : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

- $k : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}_0 :\ -2 \mapsto 2,\ -1 \mapsto 1,\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2$
  - *Überlegung:* Negative Zahlen werden auf ihr positives Gegenstück abgebildet, positive bleiben unverändert (Betrag).
  - *Vorschrift:*

$$k : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Hausaufgabe 2bi

Man kann Abbildungen auch hintereinander ausführen: $f(g(x))$ bedeutet, dass man zuerst $g(x)$ ausrechnet und auf das Ergebnis dann f anwendet. Damit ein solcher Ausdruck definiert ist, muss der Zwischenwert im Definitionsbereich der äußeren Funktion liegen.
Berechnen Sie mit f und g aus Teil (a): $f(g(1))$, $f(g(2))$, $g(f(1))$ und $g(f(2))$. Ist jeder dieser Ausdrücke überhaupt definiert? Begründen Sie.

(i) Berechnung von $f(g(1))$:

- Schritt 1: $g(1) = 1^2 = 1$.
- Schritt 2: Da 1 im Definitionsbereich von f ($\{1,2,3,4\}$) liegt, ist der Ausdruck definiert. Wir wenden f an: $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.

(ii) Berechnung von $f(g(2))$:

- Schritt 1: $g(2) = 2^2 = 4$.
- Schritt 2: Da 4 im Definitionsbereich von f ($\{1,2,3,4\}$) liegt, ist der Ausdruck definiert. Wir wenden f an: $f(4) = 2(4) + 1 = 9$.

(iii) Berechnung von $g(f(1))$:

- Schritt 1: $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.
- Schritt 2: Da 3 im Definitionsbereich von g ($\{0,1,2,3\}$) liegt, ist der Ausdruck definiert. Wir wenden g an: $g(3) = 3^2 = 9$.
- **Ergebnis:** 9 (wohldefiniert).

(iv) Berechnung von $g(f(2))$:

- Schritt 1: $f(2) = 2(2) + 1 = 5$.
- Schritt 2: Der Zwischenwert ist 5. Da 5 **nicht** im Definitionsbereich von g ($\{0,1,2,3\}$) enthalten ist, kann g darauf nicht angewendet werden.
- **Ergebnis: Nicht definiert.**

Hausaufgabe 2bii

Gegeben sind die beiden Abbildungen:

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 3$$

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$$

Berechnung von $p(q(x))$
Setze die Vorschrift $q(x) = 2x$ an die Stelle von x in die Funktion $p(x)$ ein:

$$p(q(x)) = p(2x) = 2x + 3$$

Berechnung von $q(p(x))$
Setze die Vorschrift $p(x) = x + 3$ an die Stelle von x in die Funktion $q(x)$ ein:

$$q(p(x)) = q(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$$

Hausaufgabe 2biii

Frage: Gilt für beliebige Abbildungen $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung $F_1(F_2(x)) = F_2(F_1(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

- **Entscheidung: Nein**, die Aussage gilt im Allgemeinen nicht. Die Komposition von Abbildungen ist im Allgemeinen nicht kommutativ.
- **Begründung (Gegenbeispiel):**
  Wähle als Gegenbeispiel die Funktionen p und q aus Aufgabenteil (ii), also $F_1 = p$ mit $p(x) = x + 3$ und $F_2 = q$ mit $q(x) = 2x$.

  Aus Aufgabenteil (ii) kennen wir die Terme der Verknüpfungen:

$$F_1(F_2(x)) = p(q(x)) = 2x + 3$$

$$F_2(F_1(x)) = q(p(x)) = 2x + 6$$

  Wählt man nun ein konkretes $x \in \mathbb{R}$, zum Beispiel $x = 0$, so erhält man:

$$F_1(F_2(0)) = 2(0) + 3 = 3$$

$$F_2(F_1(0)) = 2(0) + 6 = 6$$

  Da $3 \neq 6$ gilt, ist die Gleichung $F_1(F_2(x)) = F_2(F_1(x))$ widerlegt.

Hausaufgabe 3
Die Klasse 4b verkauft beim Herbstfest der Schule Waffeln. Für die Zutaten hat die Klasse 18 € ausgegeben. Jede Waffel wird für 0,50 € verkauft.

(a) Stellen Sie den Gewinn G der Klasse (in €) in Abhängigkeit von der Anzahl x der verkauften Waffeln auf. Geben Sie G als Abbildung mit Definitions- und Wertebereich an.

(b) Zeichnen Sie den Graphen von G für $0 \leq x \leq 80$ in ein Koordinatensystem. Ist der Graph eine durchgezogene Linie oder besteht er aus einzelnen Punkten? Begründen Sie.

(c) Berechnen Sie $G(50)$ und erklären Sie, was dieser Wert für die Klasse bedeutet.

(d) Wie viele Waffeln muss die Klasse mindestens verkaufen, damit sie keinen Verlust macht?

(a) Gewinnfunktion als Abbildung

Der Gewinn $G(x)$ ergibt sich aus den Gesamteinnahmen minus den Zutatenkosten:

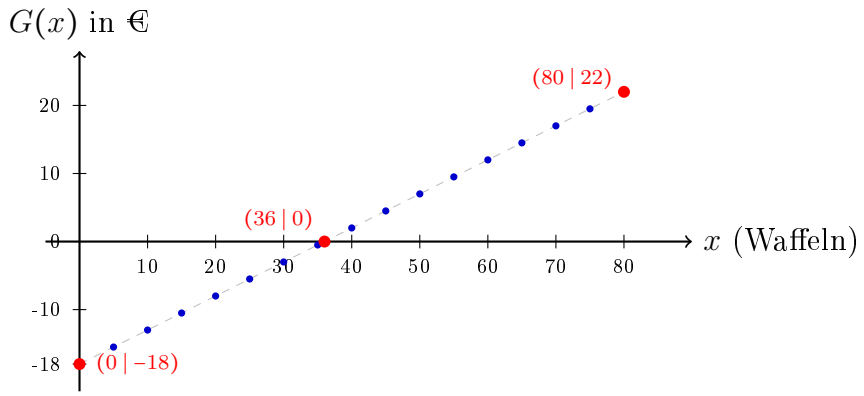
$$G(x) = 0{,}50 \cdot x - 18$$

Da nur eine ganze, nicht-negative Anzahl an Waffeln verkauft werden kann, ist der Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen inklusive Null ($\mathbb{N}_0$). Als Zielmenge (Wertebereich) wählen wir $\mathbb{R}$.

$$G : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0{,}50x - 18$$

(b) Graph der Abbildung und Begründung

- **Beschaffenheit des Graphen:** Der Graph besteht aus *isolierten Punkten* und ist *keine durchgezogene Linie*.
- **Begründung:** Die Variable x beschreibt die Anzahl verkaufter Waffeln. Da man nur eine ganze Zahl von Waffeln verkaufen kann ($x \in \{0, 1, 2, \ldots, 80\}$) und keine gebrochenen Werte (wie z. B. 3,5 Waffeln), ist der Definitionsbereich diskret. Die Punkte dürfen daher nicht durch eine durchgehende Linie verbunden werden.



(c) Berechnung und Bedeutung von $G(50)$

- **Berechnung:**

$$G(50) = 0{,}50 \cdot 50 - 18 = 25 - 18 = 7$$

- **Bedeutung:** Wenn die Klasse 4b insgesamt 50 Waffeln verkauft, hat sie nach Abzug der Zutatenausgaben von 18 € einen Reingewinn von 7 € erzielt.

(d) Mindestanzahl Verkäufe ohne Verlust

Keinen Verlust zu machen bedeutet, dass der Gewinn größer oder gleich 0 € sein muss ($G(x) \geq 0$):

$$0{,}50x - 18 \geq 0 \iff 0{,}50x \geq 18 \iff x \geq \frac{18}{0{,}50} = 36$$

Ergebnis: Die Klasse muss **mindestens 36 Waffeln** verkaufen, um keinen Verlust zu machen (Break-Even-Punkt).

Hausaufgabe 4

(a)

Aufgabe: Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die lineare Funktion $f(x) = 2x + 3$ die Regel $f(x + y) = f(x) + f(y)$ nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung. Wir wählen als Gegenbeispiel die Werte $x = 1$ und $y = 1$.

1. **Linke Seite der Regel berechnen:**

$$f(x + y) = f(1 + 1) = f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

2. **Rechte Seite der Regel berechnen:**

$$f(x) + f(y) = f(1) + f(1) = (2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 1 + 3) = 5 + 5 = 10$$

Da $7 \neq 10$ gilt, ist $f(1 + 1) \neq f(1) + f(1)$. Somit erfüllt $f(x) = 2x + 3$ die Additivitätsregel nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}$. □

(b)

Aufgabe: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Regel $f(x + y) = f(x) + f(y)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f dann proportional ist.

Lösung. Da f eine lineare Funktion ist, besitzt sie die Form $f(x) = mx + h$ für gewisse $m, h \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass $h = 0$ gilt.
Setzen wir $x = 0$ und $y = 0$ in die vorausgesetzte Regel $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ein, so erhalten wir:

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung $f(0)$, ergibt sich:

$$f(0) = 0$$

Andererseits gilt laut der Funktionsdefinition $f(x) = mx + h$ an der Stelle $x = 0$:

$$f(0) = m \cdot 0 + h = h$$

Daraus folgt direkt $h = 0$.
Die Funktionsgleichung vereinfacht sich somit zu $f(x) = mx$, was nach Definition bedeutet, dass f proportional ist. □

(c)

Aufgabe: Es sei f proportional. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $f(3x) = 3f(x)$ gilt.

Lösung. Da f proportional ist, gilt $f(x) = mx$ für ein $m \in \mathbb{R}$.

- **Linke Seite:** $f(3x) = m \cdot (3x) = 3 \cdot m \cdot x$
- **Rechte Seite:** $3 \cdot f(x) = 3 \cdot (m \cdot x) = 3 \cdot m \cdot x$

Beide Seiten stimmen überein, folglich gilt $f(3x) = 3f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Alternativer Beweis über die Additivitätsregel:

$$f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x) = f(x + x) + f(x) = f(x) + f(x) + f(x) = 3f(x)$$

□

(d)

Aufgabe: Fassen Sie (b) und die Aussage aus der Vorlesung zu einer einzigen Aussage mit „genau dann, wenn“ bzw. einem Äquivalenzpfeil zusammen.

Lösung. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ ist proportional} \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

In Worten: Eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann proportional, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Regel $f(x + y) = f(x) + f(y)$ gilt. □