

Analysis II

WS 11/12

Präsenzübung 9

-Tim Schulze-

Aufgabe 41. Definieren wir $G(x, y) = x(x-1)(x+1) - y^2$, so ist (a, b) genau dann eine Lösung der angegebenen Gleichung, wenn $G(a, b) = 0$ ist. Wir zeigen zunächst, dass die Gleichung für $b \neq 0$ lokal nach y aufgelöst werden kann. Dafür verwenden wir den *Satz von der impliziten Funktion* (Satz 43). Es gelte $G(a, b) = 0$ und $b \neq 0$. Es ist $\partial_y G(a, b) = -2b \neq 0$, d.h. $\partial_y G(a, b)$ ist invertierbar. An dieser Stelle liefert Satz 43 nun bereits das gewünschte Resultat, d.h. es gibt Umgebungen U von a und V von b und eine eindeutige C^1 Abbildung $f : U \rightarrow V$ mit $f(a) = b$, so dass $G(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt.

Natürlich kann man die Auflösung nach y auch leicht hinschreiben. Dazu überlege man sich, dass die Funktion $\phi(x) = x(x-1)(x+1)$ nichtnegativ ist, falls $x \in [-1, 0] \cap [1, \infty)$. Hier können wir also die Wurzel ziehen und erhalten

$$y = \pm \sqrt{x^3 - 1} \quad (1)$$

Ist nun eine Nullstelle (a, b) von G gegeben, mit $b \neq 0$, so können wir in einer Umgebung wie folgt eindeutig nach y auflösen:

$$y = -\sqrt{x^3 - 1}, \text{ falls } b < 0, y = \sqrt{x^3 - 1}, \text{ falls } b > 0.$$

Im Fall $G(a, b) = 0$ und $b = 0$ sehen wir, dass sich (1) in eine positive und eine negative Lösung verzweigt. Die Auflösung wäre nicht mehr lokal eindeutig. Die Bedingungen aus Satz 43 sind hier auch nicht erfüllt, da $\partial_y G(a, b) = 0$ nicht invertierbar ist.

Für die Ableitung können wir entweder (1) nach den Rechenregeln ableiten (y als Funktion von x aufgefasst) und erhalten

$$y'(x) = \pm \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - 1}} = \pm \frac{3x^2 - 1}{2y}$$

oder wir differenzieren implizit mithilfe der Kettenregel für $x \in U$:

$$0 = G'(x, y(x)) = \begin{pmatrix} \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} = \partial_x G + \partial_y G y'(x).$$

Also

$$y'(x) = -\partial_x G (\partial_y G)^{-1} = \frac{3x^2 - 1}{2y}.$$

Für die Ableitung nach x wenden wir wieder Satz 43 an. Gilt $G(a, b) = 0$ und $b = 0$, so ist $a \in \{-1, 0, 1\}$. An diesen Stellen gilt $\partial_x G(a, b) = 3a^2 - 1 \neq 0$. Also gibt es in entsprechenden Umgebungen eine eindeutige Auflösung nach x und wir fassen x als Funktion von y auf. Mit

impliziter Differentiation erhalten wir

$$G'(x(y), y) = \begin{pmatrix} \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(y) \\ y \end{pmatrix} = \partial_x G x'(y) + \partial_y G.$$

Daher $x'(y) = -\partial_y G (\partial_x G)^{-1} = \frac{2y}{3x^2-1}$, und dies ist gleich Null für Lösungen der angegebenen Gleichung mit $b = 0$.

Aufgabe 42. Offensichtlich $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 4, (x-1)^2 + y^2 - 1) = (0, 0)$. Die Darstellungsmatrix von $g'(x, y, z)$ bzgl. der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix. Für sie gilt

$$g'(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x & y & z \\ (x-1) & y & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine lineare Abbildung ist surjektiv dann und nur dann, wenn die Abbildungsmatrix vollen Zeilenrang hat. Also, wenn hier $\text{rk}(g'(x, y, z)) = 2$ ist. Wann sind also die Spalten als Vektoren aufgefasst paarweise linear abhängig? Berechnen wir paarweise alle Determinanten der Spaltenvektoren, so kommen wir dazu, dass g' nur im Punkt $(2, 0, 0)$ der Lösungsmenge nicht surjektiv ist.

Aufgabe 43. Nach Satz 45 aus der Vorlesung erhalten wir die stationären Punkte von f unter der Nebenbedingung g als Lösung des Systems $\lambda \circ g'(x, y, z) = f'(x, y, z)$, $g(x, y, z) = 0$ für zu bestimmendes $\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Offensichtlich ist $g(x, y, z) = 0$ in den in der Aufgabe gegebenen Punkten erfüllt.

Schreiben wir $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, so müssen die Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2 aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-1) & 2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

in den angegebenen Punkten bestimmt werden können.

Multipliziert man die Matrizen aus, so erhält man für $(x, y, z) = (1, -1, \sqrt{2})$ das System

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - 2 \cdot 0 &= 1, \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 1, \\ 2\lambda_1 \sqrt{2} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösung $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -1$.

Für $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2})$ hat das System

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - 2 \cdot 0 &= 1, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1, \\ 2\lambda_1 \sqrt{2} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

die Lösung $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$.

Also sind die angegebenen Punkte stationäre Punkte unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$.

Aufgabe 44. Ist a ein stationärer Punkt von f unter der Nebenbedingung g und λ der Lagrange-Multiplikator, so gilt

$$\lambda \circ g'(a) = f'(a).$$

Also verschwindet $f'(a) - \lambda \circ g'(a)$. Die Ableitung der Funktion $f - \lambda \circ g$ an der Stelle a ist aber gerade $f'(a) - \lambda'(g(a)) \circ g'(a)$. Da $\lambda \in \text{Hom}(W, \mathbb{R})$, gilt $\lambda'(g(a)) = \lambda$, also

$$f'(a) - \lambda'(g(a)) \circ g'(a) = f'(a) - \lambda \circ g'(a).$$

Damit ist a ein stationärer Punkt der angegebenen Funktion. Eingeschränkt auf die Nullstellenmenge von g ist die angegebene Funktion offensichtlich mit f identisch, denn λ ist linear.