

Musterlösung Übung 2 (Analysis I SS2010)

1 Zu zeigen ist

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{i(1)+\dots+i(m)=n} \frac{n!}{i(1)! \dots i(m)!} x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)}$$

mit vollständiger Induktion nach m .

m = 1

$$x_1^n = \sum_{i(1)=n} \frac{n!}{i(1)!} x_1^{i(1)} = \frac{n!}{n!} x_1^n \quad \checkmark$$

m = 2

Mit dem binomischen Lehrsatz berechnet man

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x_1^k x_2^{n-k} = \sum_{i(1)+i(2)=n} \frac{n!}{i(1)!i(2)!} x_1^{i(1)} x_2^{i(2)} \quad \checkmark$$

m \mapsto m + 1

Wir setzen $y_1 := x_1 + \dots + x_m$ und $y_2 := x_{m+1}$ und benutzen den Fall $m = 2$:

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_{m+1})^n &= (y_1 + y_2)^n = \sum_{j(1)+j(2)=n} \frac{n!}{j(1)!j(2)!} y_1^{j(1)} y_2^{j(2)} \\ &= \sum_{j(1)+j(2)=n} \frac{n!}{j(1)!j(2)!} (x_1 + \dots + x_m)^{j(1)} y_2^{j(2)} \\ &\stackrel{IV}{=} \sum_{j(1)+j(2)=n} \frac{n!}{j(1)!j(2)!} \left(\sum_{i(1)+\dots+i(m)=j(1)} \frac{j(1)!}{i(1)! \dots i(m)!} x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)} \right) y_2^{j(2)} \\ &= \sum_{j(1)+j(2)=n} \sum_{i(1)+\dots+i(m)=j(1)} \frac{n!}{j(1)!j(2)!} \cdot \frac{j(1)!}{i(1)! \dots i(m)!} x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)} x_{m+1}^{j(2)} \\ &= \sum_{j(2)=0}^n \sum_{i(1)+\dots+i(m)=n-j(2)} \frac{n!}{j(2)!i(1)! \dots i(m)!} x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)} x_{m+1}^{j(2)} \\ &= \sum_{j(2)=0}^n \sum_{i(1)+\dots+i(m)+j(2)=n} \frac{n!}{j(2)!i(1)! \dots i(m)!} x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)} x_{m+1}^{j(2)} \\ &= \sum_{i(1)+\dots+i(m)+i(m+1)=n} \frac{n!}{i(1)! \dots i(m+1)!} x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)} x_{m+1}^{i(m+1)} \end{aligned}$$

Dabei haben wir in dem letzten Schritt $i(m+1) := j(2)$ gesetzt.

2 Zu dem vorgelegten Kettenbruch $x = 1; 1, 2, 1, 2, \dots$ definieren wir $y := x - 1$. Damit gilt

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+y}}$$

Also

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+y}} \Leftrightarrow y = \frac{2+y}{3+y} \Leftrightarrow y^2 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}.$$

Da x positiv ist, gilt $x = \sqrt{3}$.

3 Zu prüfen sind Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

reflexiv Da H eine Untergruppe von G ist, ist das neutrale Element e_H von H dasselbe wie das neutrale Element e_G von G . Daher gilt $a = a \cdot e_G = a \cdot e_H$ für jedes $a \in H$. Also $a \sim a$ für jedes $a \in H$.

symmetrisch Es sei $a \sim b$. Dann gibt es ein $h \in H$ mit $b = ah$. Da H eine Untergruppe ist, ist auch $h^{-1} \in H$ und es gilt

$$b = ah \Rightarrow bh^{-1} = (ah)h^{-1} = a(hh^{-1}) = ae_H = a \Rightarrow a = bh^{-1}$$

und somit $b \sim a$.

transitiv Es seien $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann gibt es $h_1 \in H$ und $h_2 \in H$ mit $b = ah_1$ und $c = bh_2$. Einsetzen ergibt $c = (ah_1)h_2 = a(h_1h_2)$. Aus $h_1h_2 \in H$ folgt dann $a \sim c$.

Bemerkung Die Äquivalenzklasse $[a]$ von $a \in G$ unter dieser Relation schreibt man

$$[a] = \{b \in G \mid b = ah, h \in H\} = aH$$

und heißt Linksnebenklasse von a in G .

JU