Musterlösung Übung 3 (Analysis I SS2010)

1 Behauptung: $A(x)$ ist wahr für alle $x \in M$.

Beweis: Es sei $F := \{x \in M | A(x) \text{ falsch}\} \subset M$. Falls $F = \emptyset$, ist $A(x)$ wahr für alle $x \in M$. Angenommen $F \neq \emptyset$. Dann sei $f \in F$ kleinstes Element von F bezüglich der Wohlordnung und $G := \{x \in M | x < f\}$. Wenn $G = \emptyset$ ist, gilt $x_0 = f \in F$, also $A(x_0)$ falsch im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $G \neq \emptyset$ und $A(x)$ wahr für jedes $x \in G \subset M \setminus F$. Aus der Voraussetzung folgt dann $A(f)$ wahr im Widerspruch zu $f \in F$. Also ist die Annahme falsch, daher $F = \emptyset$.

2 1. Möglichkeit Zunächst ist zu klären, was mit einer Liste gemeint ist. Eine Liste der Länge $n \in \mathbb{N}$ sei

$$L_n := \{(l_1, \ldots, l_n) \,| l_i \neq l_j \text{ für } i \neq j,\ 1 \leq l_i \leq n \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Die Symmetrische Gruppe $S_n, n \in \mathbb{N}$, ist definiert durch

$$S_n := \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \,| f \text{ bijektiv}\}$$

zusammen mit der Komposition als Verknüpfung. Die Elemente der Symmetrischen Gruppe heißen Permutationen. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung

$$\phi : S_n \to L_n, \qquad f \mapsto \phi(f) := (f(1), \ldots, f(n))$$

bijektiv ist.

injektiv: $\phi(f) = \phi(g) \ \Rightarrow\ f(i) = g(i)$ für alle $i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow\ f = g$.

surjektiv: Es sei $l := (l_1, \ldots, l_n) \in L_n$. Definere $f \in S_n$ durch $f(i) := l_i$. Dann gilt $\phi(f) = (f(1), \ldots, f(n)) = (l_1, \ldots, l_n) = l$.

Die Anzahl der Permutationen ist also gleich der Anzahl der Listen. Letztere ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen 1 bis n als eine Liste zu schreiben. Dabei hat man n Möglichkeiten für l_1, $n-1$ Möglichkeiten für l_2, …, eine Möglichkeit für l_n. Insgesamt also $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$ Möglichkeiten.

2. Möglichkeit Es seien X_1 und X_2 Mengen mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Dann gilt

$$|\{f : X_1 \to X_2 | f \text{ bijektiv}\}| \ =\ n!$$

Beweis mit Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Nun seien Y_1 und Y_2 Mengen mit $n+1$ Elementen und $a \in Y_1$. Dann gibt es genau $n+1$ Abbildungen $f^1, \ldots, f^{n+1} : \{a\} \to Y_2$ mit $f^i(a) \neq f^j(a)$ für $i \neq j$. Die Mengen $Y_1 \setminus \{a\}$ und $Y_2 \setminus \{f^i(a)\},\ i = 1, \ldots n$, haben jeweils n Elemente. Also gibt es zu jedem $i = 1, \ldots, n+1$ nach IV genau $n!$ bijektive Abbildungen $g^i_k : Y_1 \setminus \{a\} \to Y_2 \setminus \{f^i(a)\},\ k = 1, \ldots n!$. Mittels $h^i_k : Y_1 \to Y_2$ definiert durch $h^i_k(a) := f^i(a)$ und $h^i_k(x) := g^i_k(x)$ für $x \neq a$ erhält man $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ bijektive Abbildungen.

3 1. Möglichkeit Die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definert durch $(i, j) \mapsto \frac{1}{2}(i+j-1)(i+j) - i - 1$ ist bijektiv, denn sie entspricht dem Diagonalverfahren $(1,1) \mapsto 1, (2,1) \mapsto 2, (1,2) \mapsto 3, (3,1) \mapsto 4, (2,2) \mapsto 5, \ldots$.

2. Möglichkeit Jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt sich eindeutig schreiben als $n = 2^k l$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und einer ungeraden Zahl $l \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei definiert durch $f(2^k l) := (k+1, \frac{1}{2}(l+1))$. Diese Abbildung ist bijektiv, denn

injektiv: $f(2^k l) = f(2^p q) \ \Rightarrow\ (k+1, \frac{1}{2}(l+1)) = (p+1, \frac{1}{2}(q+1)) \ \Rightarrow\ k = p, l = q$.

surjektiv: Zu $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiere $k := m-1$ und $l := 2n-1$. Dann gilt $f(2^k l) = (m, \frac{1}{2}(2n-1+1)) = (m, n)$.

JU