

Musterlösung Übung 4 (Analysis I SS2010)

1 Ein Dedekind'scher Schnitt $(A, B) \subset \mathbb{Q}$ ist definiert durch

- (a) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \emptyset$
- (b) $a \in A, x < a \Rightarrow x \in A$
- (c) $b \in B, x > b \Rightarrow x \in B$
- (d) A hat kein maximales Element

Wir zeigen, dass (c) aus (a) und (b) folgt: sei $b \in B$ und $x > b$. Angenommen $x \notin B$, dann ist $x \in A$ wegen (a). Wegen (b) ist dann $b \in A$. Widerspruch! Also $x \in B$.

Für einen Dedekind'schen Schnitt $(A, B) \subset \mathbb{Q}$ definiert man

- (a) $(A, B) < 0$, falls $A \subset \mathbb{Q}_- \setminus \{0\}$
- (b) $(A, B) > 0$, falls $B \subset \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$

Es seien nun $x = (A, B)$ und $y = (C, D)$. Im folgenden werden Mengen E, F definiert, für die $\frac{x}{y} = (E, F)$ gilt.

1. Fall $(A, B) > 0$ und $(C, D) > 0$: $E := \{z \in \mathbb{Q} | z \leq 0 \vee z = \frac{a}{d}, a \in A \cap \mathbb{Q}_+, d \in D\}$, $F := \mathbb{Q} \setminus E$. (E, F) ist ein Dedekind'scher Schnitt, denn:

- (a) Offensichtlich gelten $E \cup F = \mathbb{Q}, E \cap F = \emptyset, E \neq \emptyset, E \neq \mathbb{Q}$: es seien $b \in B$ und $c \in C \cap \mathbb{Q}_+ \neq \emptyset$. Für alle $a \in A, d \in D$ gilt dann:

$$b > a \Rightarrow bd > ad \quad \text{und} \quad d > c \Rightarrow ad > ac$$

Also $bd > ac$ und somit $\frac{b}{c} > \frac{a}{d} > 0$. Daher $\frac{b}{c} \notin E$.

- (b) Sei $e \in E$ mit $x < e$. Falls $x \leq 0$ ist, gilt $x \in E$. Sei also $e = \frac{a}{d} > x > 0$. Es folgt $dx < a$ und somit $dx \in A$, also $x = \frac{dx}{d} \in E$.
- (c) Sei $e \in E$ und $e \leq 0$. Dann ist $e \leq 0 < \frac{a}{d}$ für jedes $a \in A \cap \mathbb{Q}_+ \neq \emptyset$ und $d \in D$. Sei nun $e \in E$ und $e = \frac{a}{d} > 0$. Es gibt $a' \in A$ mit $a' > a$. Definiere $e' := \frac{a'}{d}$, damit gilt $e' > e$.

2. Fall $(A, B) < 0$ und $(C, D) > 0$: $E := \{z \in \mathbb{Q} | z = \frac{a}{c}, a \in A, c \in C \cap \mathbb{Q}_+\}$, $F := \mathbb{Q} \setminus E$. (E, F) ist ein Dedekind'scher Schnitt, denn:

- (a) Offensichtlich gelten $E \cup F = \mathbb{Q}, E \cap F = \emptyset, E \neq \emptyset, E \neq \mathbb{Q}$: $a \in A \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < 0 \Rightarrow 0 \notin E$.
- (b) Sei $e \in E$ mit $x < e = \frac{a}{c}$. Dann ist $cx < a$, also $cx \in A$. Daher gilt $x = \frac{cx}{c} \in E$.
- (c) Sei $e \in E$ und $e = \frac{a}{c} < 0$. Es gibt $a' \in A$ mit $a' > a$. Definiere $e' := \frac{a'}{c}$, damit gilt $e' > e$.

3. Fall $(A, B) > 0$ und $(C, D) < 0$: analog zum zweiten Fall.

4. Fall $(A, B) < 0$ und $(C, D) < 0$: $E := \{z \in \mathbb{Q} | z \leq 0 \vee z = \frac{b}{c}, c \in C, b \in B \cap \mathbb{Q}_-\}$, $F := \mathbb{Q} \setminus E$. (E, F) ist ein Dedekind'scher Schnitt, denn:

- (a) Offensichtlich gelten $E \cup F = \mathbb{Q}, E \cap F = \emptyset, E \neq \emptyset, E \neq \mathbb{Q}$: es seien $a \in A$ und $d \in D$, so dass $a < b$ und $0 > d > c$. Dann gilt

$$b > a \Rightarrow bd < ad \quad \text{und} \quad d > c \Rightarrow ad < ac$$

Also $bd < ac$ und somit $\frac{b}{c} < \frac{a}{d}$ für alle $\frac{b}{c} \in E$. Daher $\frac{a}{d} \notin E$.

- (b) Sei $e \in E$ und $x < e$. Falls $x \leq 0$ gilt, ist $x \in E$. Sei also $0 < x < e = \frac{b}{c}$. Dann folgt $cx > b$, also $cx \in B$, daher $x = \frac{cx}{c} \in E$.
- (c) Sei $e \leq 0$. Dann ist $e \leq 0 < \frac{b}{c} =: e'$. Sei nun $0 \leq e = \frac{b}{c}$. Es gibt $c' \in C$ mit $0 > c' > c$, also $\frac{1}{c} > \frac{1}{c'}$ und wegen $b < 0$ folgt $e = \frac{b}{c} < \frac{b}{c'} =: e'$.

2 Bringt man die Kettenbrüche q_1 bis q_4 auf den Hauptnenner vermutet man, dass folgende Rekursion gilt:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & p_1 &= a_1, & p_0 &= 1 \\ s_n &= a_n s_{n-1} + s_{n-2}, & s_1 &= 1, & s_0 &= 0 \\ \frac{p_n}{s_n} &= [a_1, \dots, a_n] \end{aligned} \tag{1}$$

Beweis durch Induktion über n . Für $n = 1$ gilt $\frac{p_1}{s_1} = a_1 = [a_1] \checkmark$. Die Behauptung (1) gelte nun für alle $1 \leq l \leq n$. Zu zeigen ist die Behauptung für $n + 1$. Mit der Rekursion (1) bildet man zu

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

den Kettenbruch

$$\frac{p_n^*}{s_n^*} = \left[a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right] = [a_1, a_2, \dots, a_{n+1}].$$

Damit gilt $p_l^* = p_l$ und $s_l^* = s_l$ für $1 \leq l \leq n - 1$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} p_n^* &= a_{n+1} \left(\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \underbrace{p_{n-1}}_{=p_{n-1}^*} + \underbrace{p_{n-2}}_{=p_{n-2}^*} \right) = (a_{n+1} a_n + 1) p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2} \\ &= a_{n+1} (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} = p_{n+1}. \end{aligned}$$

Genauso berechnet man $a_{n+1} s_n^* = s_{n+1}$. Damit ergibt sich

$$\frac{p_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{p_n^*}{s_n^*} = [a_1, a_2, \dots, a_{n+1}]. \checkmark$$

Nun wird gezeigt, dass (q_n) eine Cauchy-Folge ist:

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_n}{s_n} - \frac{p_m}{s_m} \right| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{p_k}{s_k} - \frac{p_{k-1}}{s_{k-1}} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left| \frac{p_k}{s_k} - \frac{p_{k-1}}{s_{k-1}} \right| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{q_k q_{k-1}} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\sqrt{2}^{k-1} \sqrt{2}^{k-2}} \leq \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{2}$$

Beweis zu (*): Mit der Rekursion berechnet man

$$\frac{p_k}{s_k} - \frac{p_{k-1}}{s_{k-1}} = \frac{p_k s_{k-1} - p_{k-1} s_k}{s_k s_{k-1}} = \frac{-p_{k-1} s_{k-2} + p_{k-2} s_{k-1}}{s_k s_{k-1}} = \dots = \frac{(-1)^k}{s_k s_{k-1}}.$$

Beweis zu ():** Wegen $a_n \in \mathbb{N}$ gilt $s_n \geq f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ (n -te Fibonacci-Zahl). Da f_n monoton wachsend ist, gilt

$$f_n \geq 2f_{n-2} \Rightarrow f_{2m+1} \geq f_{2m} \geq 2f_{2m-2} \geq \dots \geq 2^m.$$

Insgesamt also $s_n \geq f_n \geq \sqrt{2}^{n-1}$.

3 Es wird gezeigt:

$$a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists l, k \in \mathbb{N}, l \neq k : a_k = a_l.$$

\Rightarrow : Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $N \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}, p < q$, so dass $a = N + \frac{p}{q}$ und $[a] = N$ gilt. Dann gilt $(q+1)a = (q+1)N + p + \frac{p}{q} = N' + \frac{p}{q}$ mit $N' = [(q+1)a] \in \mathbb{Z}$. Man berechnet

$$a_{q+1} = (q+1)a - [(q+1)a] = \frac{p}{q} = a - [a] = a_1.$$

\Leftarrow : Es sei $k \neq l$ und $a_l = a_k$. Daraus ergibt sich

$$ka - [ka] = la - [la] \Rightarrow a(k-l) = [ka] - [la] \Rightarrow a = \frac{[ka] - [la]}{k-l} \in \mathbb{Q}.$$