# Musterlösung Übung 5 (Analysis I SS2010)

**1** Es sei $\left(a_{i_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{i_j} \geq \frac{1}{i_j}$. Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $i_k > 2i_j$, also eine Zuordnung $i_j \mapsto f(i_j) =: i_k$. Dann gilt

$$a_{i_k}(i_k - i_j) \geq \frac{1}{i_k}(i_k - i_j) = 1 - \frac{i_j}{i_k} > 1 - \frac{i_j}{2i_j} = \frac{1}{2}.$$

Für die Teilsummen $p_N$

$$\begin{aligned} p_N &= a_1 + \cdots + a_{i_1-1} + \sum_{m=0}^{N} \sum_{s=f^m(i_1)}^{f^{m+1}(i_1)-1} a_s \\ &= \underbrace{a_1 + \cdots + a_{i_1-1}}_{=:L} + a_{i_1} + \cdots + a_{f(i_1)-1} + \underbrace{a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f^2(i_1)-1}}_{\geq a_{f^2(i_1)}(f^2(i_1)-f^1(i_1)\geq \frac{1}{2}} + a_{f^2(i_1)} + \cdots + a_{f^{N+1}(i_1)-1} \\ &\geq L + \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2} = L + \frac{1}{2}(N+1) \to \infty \quad (N \to \infty) \end{aligned}$$

gilt $p_N = s_{f^{N+1}(i_1)-1}$, wobei $s_n$ die Teilsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seien. $(p_N)$ ist also eine unbeschränkte Teilfolge der monoton wachsenden Folge $(s_n)$. Daher ist $(s_n)$ auch unbeschränkt und somit nicht konvergent.

**2 (a)** Es sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =: q < 1$ und $\epsilon := \frac{1}{2}(1-q)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Es sei $p := 1 - \frac{1}{2}\epsilon$. Dann gilt $q < q + \epsilon < p < 1$ und $\sqrt[n]{a_n} < p \;\Rightarrow\; a_n < p^n$ für alle $n \geq N$. Aus dem Majorantenkriterium mit der Geometrischen Reihe als Majorante folgt die Behauptung.

**2 (b)** Genauso wie in (a) konstruiert man ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{a_n} > p > 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt $a_n > 1$ für alle $n \geq N$. Also ist $(a_n)$ keine Nullfoge und daher divergiert die Reihe.

**3** **1. Möglichkeit:** Es sei $a_n := |nx^n|$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{|nx^n|} = \sqrt[n]{n}|x| \to |x| \quad (n \to \infty).$$

Für $|x| < 1$ ist die Reihe $\sum |nx^n|$ also nach Aufgabe 2 konvergent. Daher ist die Reihe $\sum nx^n$ dort absolut konvergent und somit auch konvergent. Es bleibt $\sqrt[n]{n} \to 1$ zu zeigen: für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n + 1 > \sqrt{n} > 1$$

nach der Bernoullischen Ungleichung. Ziehen der $n$-ten Wurzel ergibt

$$1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

wegen der Monotonie der $n$-ten Wurzel. Man erhält daraus

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \to 1 \ (n \to \infty) \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{n} \to 1^2 = 1 \ (n \to \infty).$$

Alternativer Beweis: Sei $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann folgt

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_2^2 \;\Rightarrow\; a_2^2 \leq \frac{2}{n-1} \;\Rightarrow\; |a_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \to 0 \;\Rightarrow\; a_n \to 0$$

**2. Möglichkeit:** Es sei $a_n := nx^n$. Dann folgt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x| \to |x| \quad (n \to \infty)$$

Daher konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ absolut nach dem Qoutientenkriterium.

**3. Möglichkeit:** Es sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ die $n$-te Teilsumme der Reihe. Es gilt

$$\begin{aligned} s_n - xs_n &= \sum_{k=1}^{n} kx^k - \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} = x + \sum_{k=2}^{n} kx^k - \sum_{k=2}^{n}(k-1)x^k \quad - nx^{n+1} \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} \left(kx^k - (k-1)x^k\right) \quad - nx^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad - 1 - nx^{n+1} \end{aligned}$$

Umstellen nach $s_n$ und Grenzübergang für $|x| < 1$ ergibt

$$s_n = \frac{1}{1-x} \left( \sum_{k=0}^{n} x^k \quad - 1 - nx^{n+1} \right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-x} \left( \frac{1}{1-x} \quad - 1 \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

**4. Möglichkeit (kommt später):** Es sei

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad |x| < 1$$

Für die Ableitung von $f$ gilt dann

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xf'(x) = x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = x \cdot \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

JU