Musterlösung Übung 6 (Analysis I SS2010)

1 Es sei oBdA $a > 0$. Definiere

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{g_1} \quad \text{so dass} \quad s_1 - \frac{1}{g_1} < a < s_1 \\ s_2 &= s_1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots - \frac{1}{u_2} \quad \text{so dass} \quad s_2 < a < s_2 + \frac{1}{u_2} \\ s_3 &= s_2 + \frac{1}{g_1+2} + \frac{1}{g_1+4} + \cdots + \frac{1}{g_3} \quad \text{so dass} \quad s_3 - \frac{1}{g_3} < a < s_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man erhält also $s_n < a < s_n + \frac{1}{u_n}$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ und $s_n - \frac{1}{g_n} < a < s_n$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\epsilon > 0$ und $N := \frac{1}{\epsilon}$. Da $(g_j) \subset 2\mathbb{Z}+1$ und $(u_j) \subset 2\mathbb{Z}$ streng monoton wachsend sind, gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $u_{2k} > N$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $g_{2l+1} > N$. Definiere $p := \max\{2l+1, 2k\}$. Dann gilt für alle $n > p$

$$|s_n - a| < \begin{cases} \frac{1}{g_n} < \frac{1}{g_{2l+1}} < \frac{1}{N} = \epsilon & : \ n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{N} = \epsilon & : \ n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also konvergiert (s_n) gegen a.

Es sei σ die durch obige Definition festgelegte Umordnung der Reihenglieder. Zwischen s_m und s_{m+1} liegen endlich viele Teilsummen $t_k := \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)}$. Da (s_n) konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass $|s_m - s_{m+1}| < \epsilon$ für alle $m > N$ gilt. Also gibt es auch einen Index $N' > N$, so dass $|t_k - a| \leq |s_m - s_{m+1}| < \epsilon$ für alle $k > N'$. Also konvergiert auch (t_k) gegen a.

2 Für absolut konvergente Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Die Behauptung der Aufgabe ergibt sich, indem man a_n durch $\frac{a_n}{n!}$ und b_n durch $\frac{b_n}{n!}$ ersetzt.

Beweis: Es seien

$$s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k, \quad t_m = \sum_{k=0}^{m} b_k, \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Die Behauptung schreibt sich dann als

$$\lim_{m\to\infty} s_m \cdot \lim_{m\to\infty} t_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} c_n.$$

Falls $\left(\sum_{n=0}^{m} c_n\right)_m$ konvergiert, schreibt man dies als

$$\lim_{m\to\infty} s_m \cdot \lim_{m\to\infty} t_m - \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} c_n = \lim_{m\to\infty} \underbrace{(s_m t_m - \sum_{n=0}^{m} c_n)}_{:=r_m}.$$

Es reicht nun zu zeigen, dass (a) $\left(\sum_{n=0}^{m} c_n\right)_m$ konvergiert und (b) $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$ ist.

zu (a): Aus der Ungleichung

$$0 \leq \sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{m} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |a_j b_{n-j}| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_j|\,|b_n| = \sum_{j=0}^{m} |a_j| \cdot \sum_{n=0}^{m} |b_n|$$

folgt für $m \to \infty$ die Behauptung aus der absoluten Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

zu (b):

$$\begin{aligned} |r_m| &= \left|\sum_{k+l>m} a_k b_l\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{k+l=j} a_k b_l\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right| \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{k=0}^{j} |a_k b_{j-k}| = \sum_{j=m+1}^{2m} |c_j| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |c_j| \overset{\text{(a)}}{\to} 0 \quad (m\to\infty) \end{aligned}$$

3 Sei $1 > r > 0$. Die Menge $A := \{q \in \mathbb{N} | \frac{1}{q} > r\}$ ist endlich. Da $\frac{p}{q}$ mit $p < q$ in gekürzter Form vorliegt, ist auch die Menge $B := \{f^{-1}(\frac{1}{q}) | q \in A\}$ endlich. Schreibt man $B = \{r_1, \ldots, r_n\}$, gilt $f(x) > r$ für alle $x \in B$ und $f(x) = 0$ für $x \in (0,1) \setminus B$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist

(a) f halbstetig nach oben in x_0: sei $r > f(x_0) = 0$ und $\epsilon := \min\{|r_j - x_0| : r_j \in B\}$. Dann gilt $f(x) = 0 < r$ für alle $|x - x_0| < \epsilon$.

(b) f halbstetig nach unten in x_0: sei $r < f(x_0) = 0$. Für alle $x \in (0,1)$ gilt $f(x) \geq 0 > r$.

Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann ist

(a) f halbstetig nach oben in x_0: sei $r > f(x_0) = \frac{1}{q}$.
   i. $x_0 \notin B$: $\quad \epsilon := \min\{|r_j - x_0| : r_j \in B\} \;\Rightarrow\; f(x) = 0 < r$ für alle $|x - x_0| < \epsilon$.
   ii. $x_0 \in B$ und $B \neq \{x_0\}$: $\quad \epsilon := \min\{|r_j - x_0| : r_j \in B \setminus \{x_0\}\} \;\Rightarrow\; f(x) = 0 < r$ für alle $|x - x_0| < \epsilon$.
   iii. $x_0 \in B = \{x_0\}$: $\quad f(x) = 0$ für alle $x \neq x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < r$ für alle $x \in (0,1)$.

(b) f nicht halbstetig nach unten in x_0: Angenommen f ist halbstetig nach unten. Sei $r < f(x_0) = \frac{1}{q}$ und $\epsilon > 0$. Für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = 0 < r$ im Widerspruch zur Annahme.

Die Funktion f ist also stetig in den irrationalen und nicht stetig in den rationalen Zahlen.

JU