Musterlösung Übung 7 (Analysis I SS2010)

1a Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\epsilon > 0$ und $z \in \mathbb{Z}$. Sei $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Für jedes $x \in (z-\delta, z+\delta) \cap \mathbb{Z} = \{z\}$ gilt dann $|f(x) - f(z)| = |f(z) - f(z)| = 0 < \epsilon$. Also ist f stetig in jedem $z \in \mathbb{Z}$.

1b Die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x)$ ist stetig, denn sie ist auf $(-\infty, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, \infty)$ konstant. Dann ist auch $f = g\big|_{(\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{2}\})\,\cap\mathbb{Q}}$ stetig.

2 Es sei $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,\cap (0,1)$. Die Funktion

$$f_r : [0,1] \setminus \{r\} \to \mathbb{R}, \quad f_r(x) := \frac{1}{x-r}$$

ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Daher ist auch

$$g_r := f_r\big|_{[0,1]\setminus\{r\}\cap\mathbb{Q}} = f_r\big|_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$$

stetig. Aber g_r ist nicht beschränkt, denn für jedes $K > 0$ gilt:

$$0 < x < \frac{1}{K} + r \;\Rightarrow\; \frac{1}{K} > x - r \;\Rightarrow\; \frac{1}{x-r} > K \;\Rightarrow\; g_r(x) > K.$$

3 Es sei

$$s_n := \begin{pmatrix} s_{11}^n & s_{12}^n \\ s_{22}^n & s_{21}^n \end{pmatrix} := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

die n-te Teilsumme von $\exp(A)$.

Behauptung: $\left(s_{ij}^n\right)$ ist konvergent für $n \to \infty$.

Es seien $a_{ij}^{(n)}$ die Einträge der Matrix A^n und $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}$. Für $x := \max\{|a_{ij}| : 1 < i,j < 2\}$ gilt $\left|a_{ij}^{(n)}\right| \le (2x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, denn:

n=1: ✓

n ↦ n+1: Für gewisse Indizes $s, t, s', t', p, q, p', q'$ gilt

$$\left|a_{ij}^{(n+1)}\right| = \left|a_{st} \cdot a_{s't'}^{(n)} + a_{pq} \cdot a_{p'q'}^{(n)}\right| \le |a_{st}| \cdot \left|a_{s't'}^{(n)}\right| + |a_{pq}| \cdot \left|a_{p'q'}^{(n)}\right| \le x \cdot (2x)^n + x \cdot (2x)^n = (2x)^{n+1} \quad \checkmark$$

Die Einträge in den Matrizen der Teilsummen lassen sich als

$$s_{ij}^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$$

schreiben. Man berechnet nun

$$\tilde{s}_{ij}^n := \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}\right| \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{(2x)^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} \to e^{2x} \quad (n \to \infty)$$

Daher ist $\left(\tilde{s}_{ij}^n\right)$ konvergent, also $\left(s_{ij}^n\right)$ absolut konvergent und damit auch konvergent.

Die Funktionalgleichung

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

gilt nicht für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Es gilt $A^n = A$ für $n \in \mathbb{N}$. Also

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k!} \\ 0 & \frac{1}{k!} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \exp A.$$

Es gilt $B^n = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, also

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp B.$$

Daraus ergibt sich

$$\exp A \cdot \exp B = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & e \end{pmatrix}, \qquad \exp B \cdot \exp A = \begin{pmatrix} 1 & 2e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Wegen $\exp(A+B) = \exp(B+A)$ ist daher die Funktionalgleichung nicht erfüllt.

JU