Musterlösung Übung 8 (Analysis I SS2010)

1 Definiere zunächst eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to S^2, \qquad f(x) := (\cos x, \sin x, 0).$$

Sie ist wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ wohldefiniert. Sie ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, denn für $x \to x_0$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\cos x, \sin x, 0) = (\cos x_0, \sin x_0, 0) = f(x_0).$$

Definiere nun eine Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := x + \pi.$$

Diese Abbildung ist stetig. Definiere jetzt

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := T \circ f(x) - T \circ f \circ g(x).$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist h stetig und es gilt

$$\begin{aligned} h(x+\pi) &= T\left(f(x+\pi)\right) - T\left(f\left(g(x+\pi)\right)\right) \\ &= T\left(f(g(x))\right) - T\left(f\left(x+2\pi\right)\right) \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wenn $h(x_0) = 0$ gilt folgt

$$T(f(x_0)) = T(f(g(x_0)) \quad \Leftrightarrow \quad T(\cos x_0, \sin x_0, 0) = T(\cos(x_0+\pi), \sin(x_0+\pi), 0) = T(-\cos x_0, -\sin x_0, 0).$$

Wenn $h(x) < (>)\, 0$ ist, so gilt $h(x+\pi) > (<)\, 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass es ein $x_0 \in (x, x+\pi)$ mit $h(x_0) = 0$ gibt.

2 **Wurzelkriterium**: Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, eine Reihe. Dann gilt:

(a) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

(b) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

(c) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

Wir wenden das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an.

Im folgenden sei $x \neq 0$ und $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Für $r \in [0, \infty)$ gilt

$$|x| \cdot r = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|}.$$

Für $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ erhält man absolute Konvergenz für $|x| < \frac{1}{r} = R$, also $x \in (-R, R)$. Für $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ erhält man Divergenz für $|x| > \frac{1}{r} = R$, also $x \in \mathbb{R} \setminus \{[-R, R]\}$.

Wenn $r = \infty$ ist, ist die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ notwendigerweise unbeschränkt. Dann ist auch $\left(|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right) = \left(\sqrt[n]{|a_n x^n|}\right)$ unbeschränkt, also $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \infty$. Nach dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe.

3 Es sei $\epsilon > 0$ und $a \in (-R, R)$. Es wird gezeigt, dass f in a stetig ist. Es seien

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

die Teilsummen der Reihe. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq N$ gilt:

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \left|x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \rho^k < \epsilon$$

für alle $|x| \leq \rho < R$. Für $m \to \infty$ folgt daraus $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $|x| \leq \rho$.
Nun sei ρ so gewählt, dass $a \in [-\rho, \rho] \subset (-R, R)$.
Da f_N als Polynom stetig in a ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon$$

Wähle nun $\delta' < \delta$ derart, dass

$$(a - \delta', a + \delta') \subset [-\rho, \rho].$$

Für alle $x \in (a - \delta', a + \delta')$ gilt dann

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq 3\epsilon$$

JU