Musterlösung Übung 9 (Analysis I SS2010)

1 a) **injektiv:** Da f streng monoton wachsend ist folgt $f(x) < (>) f(y)$ aus $x < (>) y$. Also gilt $f(x) \neq f(y)$, falls $x \neq y$.

surjektiv: Es sei $y \in (c,d)$ und $h_y(x) := f(x) - y$. Dann gilt $h_y(a) = f(a) - y = c - y < 0$ und $h_y(b) = f(b) - y = d - y > 0$. Da h stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in (c,d)$ mit $0 = h(x_0) = f(x_0) - y$. Also folgt $f(x_0) = y$.

1 b) Wir zeigen zunächst, dass ϕ streng monoton wachsend ist. Angenommen, das ist nicht so. Dann gibt es $y_0 < y_1$ mit $\phi(y_0) \geq \phi(y_1)$. Da f streng monoton ist, folgt $f(y_0) < f(y_1)$ und $y_0 = f(\phi(y_0)) \geq f(\phi(y_1)) = y_1$ im Widerspruch zur Monotonie von f.

Es sei $y_0 \in (c,d)$. Wir zeigen, dass ϕ in y_0 stetig ist. Sei $\epsilon > 0$. Seien

$$y_0^- := f(\phi(y_0) - \epsilon), \quad y_0^+ := f(\phi(y_0) + \epsilon).$$

Aus der Monotonie von f ergibt sich

$$\phi(y_0) - \epsilon < \phi(y_0) < \phi(y_0) + \epsilon \;\Rightarrow\; y_0^- < y_0 < y_0^+$$

daher definiert man

$$\delta := \min\{y_0^+ - y_0, y_0 - y_0^-\} > 0.$$

Für alle $y \in (c,d)$ mit $|y - y_0| < \delta$ gilt dann:

$$y_0^- < y < y_0^+ \;\Rightarrow\; \phi(y_0^-) < \phi(y) < \phi(y_0^+) \;\Rightarrow\; \phi(y_0) - \epsilon < \phi(y) < \phi(y_0) + \epsilon \;\Rightarrow\; |\phi(y_0) - \phi(y)| < \epsilon$$

Für die Randpunkte c und d geht der Beweis genauso.

2 a) Zunächst gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} \overset{s:=-h}{=} \lim_{s\to 0} \frac{e^s - 1}{-s} = -\lim_{s\to 0} \frac{e^s - 1}{s} = -1.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{-x-h} - e^{-x}}{h} = e^{-x} \cdot \frac{e^{-h} - 1}{h} \;\to\; -e^{-x} = f'(x) \quad (h \to 0)$$

2 b) Zunächst gilt

$$x^n - a^n = (x - a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} a^k .$$

Damit ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} a^k \quad \to \quad f'(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} a^k = n a^{n-1} \quad (x \to a)$$

3) Mit

$$z := \left(\frac{1}{-1+i}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{gilt} \quad z^3 = \frac{1}{-1+i}.$$

Diese Gleichung wird nun nach z aufgelöst. Man schreibt

$$w := \frac{1}{-1+i} = \frac{1}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i .$$

Die komplexe Zahl w liegt in der Gauss'schen Zahlenebene auf der Winkelhalbierenden im dritten Quadranten, daher gilt

$$w = |w|(\cos \tfrac{5}{4}\pi + i \cdot \sin \tfrac{5}{4}\pi) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos \tfrac{5}{4}\pi + i \cdot \sin \tfrac{5}{4}\pi).$$

Schreibt man

$$z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi) = |z| e^{i\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

mit der Euler'schen Formel, so gilt

$$z^3 = |z|^3 e^{i \cdot 3\phi} = |z|^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi).$$

Mit $\psi := 3\phi$ erhält man

$$\begin{array}{lll} z^3 = w & \Leftrightarrow & |z|^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \cdot \sin \frac{5}{4}\pi), \quad \phi \in [0, 2\pi) \\ & \Leftrightarrow & |z|^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \ \cos\psi = \cos \frac{5}{4}\pi \ \wedge \ \sin\psi = \sin \frac{5}{4}\pi, \quad \psi \in [0, 6\pi) \\ & \Leftrightarrow & |z| = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \ \wedge \ \psi \in \left\{\frac{5}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi + 2\pi, \frac{5}{4}\pi + 4\pi\right\} \end{array}$$

Insgesamt gibt es also drei Lösungen der Gleichung $z^3 = w$, nämlich

$$\begin{array}{lll} z_0 & = & \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}\pi) + i \cdot \sin(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}\pi)\right) \\ z_1 & = & \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos(\frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{4}\pi + 2\pi)) + i \cdot \sin(\frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{4}\pi + 2\pi))\right) \\ z_2 & = & \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos(\frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{4}\pi + 4\pi)) + i \cdot \sin(\frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{4}\pi + 4\pi))\right) \end{array}$$

Man kann die Lösungen von $z^n = w$ als Formel wie folgt schreiben:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

JU