

Musterlösung Übung 10 (Analysis I SS2010)

1 a Für $n \geq N$ gilt

$$|z_{n+1}| \leq \xi |z_n| \leq \dots \leq \xi^{n-N+1} |z_N| = \xi^n \cdot \xi^{1-N} |z_N|.$$

Sei $a_n := z_{n+1}$ und $b_n := \xi^n \cdot \xi^{1-N} |z_N| \in \mathbb{R}$. Damit gilt $|a_n| \leq b_n$ und die geometrische Reihe ist eine konvergente Majorante für $\sum |a_n|$. Daher ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

1 b Wegen $z_n = a_n + i \cdot b_n$ folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum z_n$ die Konvergenz der reellen Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$. Wegen

$$|a_n| = \sqrt{|a_n|^2} \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = |z_n|$$

ist $\sum a_n$ absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium. Genauso $\sum b_n$. Damit gilt $\sum a_n = \sum a_{\phi(n)}$ und $\sum b_n = \sum b_{\phi(n)}$. Wegen $z_{\phi(n)} = a_{\phi(n)} + i \cdot b_{\phi(n)}$ folgt dann die Konvergenz von $\sum z_{\phi(n)}$. Wegen

$$|z_{\phi(n)}| = |a_{\phi(n)} + i \cdot b_{\phi(n)}| = \sqrt{|a_{\phi(n)}|^2 + |b_{\phi(n)}|^2} \leq \sqrt{(|a_{\phi(n)}| + |b_{\phi(n)}|)^2} = |a_{\phi(n)}| + |b_{\phi(n)}|$$

und der absoluten Konvergenz von $\sum a_{\phi(n)}$ und $\sum b_{\phi(n)}$ ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum z_{\phi(n)}$ absolut konvergent.

2 Wir berechnen den Differenzenquotienten in Null. Wegen

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x} \right| = |x \sin(1/x)| \leq |x \cdot 1| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0) \in \mathbb{R}.$$

Also ist f differenzierbar in Null.

3 Wir betrachten die Funktion $h(x) = \cos x - \sin x$. Gesucht ist $x_0 \in [0, \pi/2]$ mit

$$0 = h(x_0) \Leftrightarrow \cos x_0 = \sin x_0 \Leftrightarrow \cos x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \quad (*)$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass \cos auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend und stetig ist. Daher ist \cos dort bijektiv (Aufgabe 1 Blatt 9). Wegen $\frac{\pi}{2} - x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $x_0 = \frac{\pi}{2} - x_0$ aus (*). Also $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Damit ist auch gezeigt, dass $\frac{\pi}{4}$ die einzige Stelle in $[0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos x = \sin x$ ist.

JU