# Musterlösung Übung 11 (Analysis I SS2010)

**1** Riemann-integrierbare Funktionaen auf $[a,b]$ sind beschränkt. Daher sind

$$||f|| := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}, \quad ||g|| := \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert. Durch Verfeinerungen darf angenommen werden, dass Treppenfunktionen auf derselben Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ definiert sind. Es sei $x_k \in (t_k, t_{k+1})$ und $\delta_k := t_{k+1} - t_k$. Da $f$ und $g$ Riemann-integrierbar sind, gibt es zu $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi_i, \psi_i$, $i \in \{1,2\}$, mit

$$\phi_1(x) \le f(x) \le \psi_1(x) \quad \text{und} \quad \phi_2(x) \le g(x) \le \psi_2(x)$$

für alle $x \in [a,b]$, so dass für $i \in \{1,2\}$ gilt:

$$\left| \int_a^b \psi_i(x)\,dx \; - \; \int_a^b \phi_i(x)\,dx \right| \quad = \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_i(x_k) - \phi_i(x_k)) \right| < \epsilon \tag{1}$$

**1 a** Definiere

$$\begin{aligned} h(x) &:= \psi_1(x) - \phi_1(x) \; + \; \psi_2(x) - \phi_2(x) \\ s(x) &:= \max_{x\in[a,b]} \{\phi_1(x), \phi_2(x)\} \\ t(x) &:= \max_{x\in[a,b]} \{\psi_1(x), \psi_2(x)\} \end{aligned}$$

Dann sind $s$ und $t$ Treppenfunktionen mit

$$s(x) \le \max_{x\in[a,b]} \{f(x), g(x)\} \le t(x)$$

und es gilt die

**Behauptung:** $t(x_k) - s(x_k) \le h(x_k)$

**Beweis:**

1. Fall: $\phi_1(x_k) \le \phi_2(x_k), \psi_1(x_k) \le \psi_2(x_k) \;\Rightarrow\; t(x_k) - s(x_k) = \psi_2(x_k) - \phi_2(x_k) \le h(x_k)$

2. Fall: $\phi_1(x_k) \le \phi_2(x_k), \psi_1(x_k) \ge \psi_2(x_k) \;\Rightarrow\; t(x_k) - s(x_k) = \phi_2(x_k) - \psi_1(x_k) \le \phi_2(x_k) - \psi_2(x_k) \le h(x_k)$

3. Fall: $\phi_1(x_k) \ge \phi_2(x_k), \psi_1(x_k) \ge \psi_2(x_k) \;\Rightarrow\; t(x_k) - s(x_k) = \phi_1(x_k) - \psi_1(x_k) \le h(x_k)$

4. Fall: $\phi_1(x_k) \ge \phi_2(x_k), \psi_1(x_k) \le \psi_2(x_k) \;\Rightarrow\; t(x_k) - s(x_k) = \phi_1(x_k) - \psi_2(x_k) \le \phi_1(x_k) - \psi_1(x_k) \le h(x_k)$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b t(x)\,dx \; - \; \int_a^b s(x)\,dx \right| \quad &= \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(t(x_k) - s(x_k)) \right| \le \left| \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k h(x_k) \right| \\ &= \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_1(x_k) - \phi_1(x_k)) \; + \; \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_2(x_k) - \phi_2(x_k)) \right| \\ &\le \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_1(x_k) - \phi_1(x_k) \right| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_2(x_k) - \phi_2(x_k) \right| \overset{(1)}{<} \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

**1 b** Definiere

$$f_+(x) := \max_{x\in[a,b]} \{0, f(x)\} \quad \text{und} \quad f_-(x) := \max_{x\in[a,b]} \{0, -f(x)\}.$$

Dann gelten $f_+ \ge 0, f_- \ge 0, f = f_+ - f_-$ und $f_+, f_-$ sind nach Aufgabenteil 1a Riemann-integrierbar. Genauso für $g$. Man berechnet

$$f \cdot g = (f_+ - f_-) \cdot (g_+ - g_-) = f_+ g_+ - f_+ g_- - f_- g_+ + f_- g_-$$

daher genügt es die Behauptung für $f \geq 0$ und $g \geq 0$ zu zeigen. Dazu seien

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1(x) &:= \min_{x\in[a,b]} \{\psi_1(x), ||f||\} \\
\tilde{\phi}_1(x) &:= \max_{x\in[a,b]} \{0, \phi_1(x)\} \\
\tilde{\phi}_2(x) &:= \max_{x\in[a,b]} \{0, \phi_2(x)\}
\end{aligned}$$

Dann sind $\tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ und $\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2, \tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2$ Treppenfunktionen mit

$$0 \leq \tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2(x) \leq f(x)\tilde{\phi}_2(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x)\psi_2(x) \leq \tilde{\psi}_1(x)\psi_2(x)$$

und

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \tilde{\psi}_1(x)\psi_2(x)\,dx - \int_a^b \tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \left(\tilde{\psi}_1(x_k)\psi_2(x_k) - \tilde{\phi}_1(x_k)\tilde{\phi}_2(x_k)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \left(\tilde{\psi}_1(x_k)\psi_2(x_k) - \tilde{\psi}_1(x_k)\tilde{\phi}_2(x_k) + \tilde{\psi}_1(x_k)\tilde{\phi}_2(x_k) - \tilde{\phi}_1(x_k)\tilde{\phi}_2(x_k)\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \left(\psi_2(x_k) - \tilde{\phi}_2(x_k)\right)\tilde{\psi}_1(x_k)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \left(\tilde{\psi}_1(x_k) - \tilde{\phi}_1(x_k)\right)\tilde{\phi}_2(x_k)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_2(x_k) - \phi_2(x_k))\right| \cdot ||f|| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\psi_1(x_k) - \phi_1(x_k))\right| \cdot ||g|| \\
&\overset{(1)}{\leq} \epsilon||f|| + \epsilon||g||
\end{aligned}$$

**2** Es sei $f$ monoton wachsend. Ansonsten betrachtet man $-f$. Eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ sei gegeben durch

$$t_k = k \cdot \frac{b-a}{n} + a, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Dann ist $\delta_k = t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Definiere nun Treppenfunktionen

$$\begin{aligned}
\phi(x) &:= f(t_k) \quad \text{für} \quad x \in [t_k, t_{k+1}) \\
\psi(x) &:= f(t_{k+1}) \quad \text{für} \quad x \in (t_k, t_{k+1}]
\end{aligned}$$

Aus der Monotonie ergibt sich

$$\begin{aligned}
x \in [t_k, t_{k+1}) &\Rightarrow \phi(x) = f(t_k) \leq f(x) \\
x \in (t_k, t_{k+1}] &\Rightarrow f(x) \leq f(t_{k+1}) = \psi(x)
\end{aligned}$$

also gilt $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Wie in Aufgabe 1 sei $x_k \in (t_k, t_{k+1})$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k\left(\psi(x_k) - \phi(x_k)\right)\right| \\
&= \frac{b-a}{n}\left(f(t_0) - f(t_n)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) - f(b)\right) \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

**3** Es gilt

$$0 = f'(x) = (\cos x - \sin x)e^{\sin x + \cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \cos x$$

Aus der Vorlesung wissen wir dass der Kosinus auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend ist, also gilt dort:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \cos x > \cos y \tag{2}$$

**1. Fall:** $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Aus Aufgabe 3 von Übung 10 wissen wir, dass $x = \frac{\pi}{4}$ die einzige Lösung ist.

**2. Fall:** $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Hier ist der Sinus streng monoton fallend, denn

$$x < y \;\Rightarrow\; x - \tfrac{\pi}{2} < y - \tfrac{\pi}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \cos(x - \tfrac{\pi}{2}) > \cos(y - \tfrac{\pi}{2}) \;\Rightarrow\; \sin x > \sin y$$

Außerdem ist $\sin x > 0$, denn: Angenommen es gibt ein $x_0$ mit $\sin x_0 < 0$, so folgt aus $x_0 < \pi$ der Widerspruch $\sin x_0 > \sin \pi = 0$.

Genauso ist der Kosinus streng monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Rightarrow \quad x - \pi < y - \pi \;\Rightarrow\; -(x-\pi) > -(y-\pi) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \cos(-(x-\pi)) < \cos(-(y-\pi)) \;\Rightarrow\; -\cos x < -\cos y \\ &\Rightarrow \quad \cos x > \cos y \end{aligned} \tag{3}$$

Außerdem ist $\cos x < 0$, denn: Angenommen es gibt ein $x_0$ mit $\cos x_0 > 0$, so folgt aus $x_0 > \frac{\pi}{2}$ der Widerspruch $\cos x_0 < \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Wegen $\sin x > 0$ und $\cos x < 0$ gilt auf diesem Intervall also $\sin x \neq \cos x$.

**3. Fall:** $x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Wir führen den Fall auf den ersten Fall zurück:

$$\cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad -\cos(x-\pi) = -\sin(x-\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x-\pi) = \sin(x-\pi) \overset{\text{1. Fall}}{\Leftrightarrow} x - \pi = \tfrac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{5}{4}\pi$$

**4. Fall:** $x \in [\frac{3}{2}, 2\pi]$.

Wir führen den Fall auf den zweiten Fall zurück:

$$\cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad -\cos(x-\pi) = -\sin(x-\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x-\pi) = \sin(x-\pi) \overset{\text{2. Fall}}{\Rightarrow} \cos x \neq \sin x$$

**Insgesamt** erhalten wir wegen $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ und $\sin x = \sin(x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, und den vier Fällen

$$\cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\tfrac{5}{4}\pi + 2k\pi, \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

JU