Musterlösung Übung 12 (Analysis I SS2010)

1 Wir betrachten die Funktionen

$$f,\, f_n(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}, \quad f(x) = |x|$$

Behauptung: f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

Beweis: Zu zeigen ist $||f_n - f|| \to 0$ $(n \to \infty)$. Es sei

$$g_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - x \quad \text{für } x \geq 0$$

Es gelten

$$g_n(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} > x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} + x^2 > x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} > 0 \checkmark \tag{1}$$

$$g_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{\frac{1}{n} + x^2}} - 1 < 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_n \text{ streng monoton fallend} \tag{2}$$

$$f_n(x) - |x| = f_n(-x) - |-x| \tag{3}$$

Damit berechnet man

$$||f_n - f|| = \sup_{x\in[-1,1]} \left\{ \left| \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - |x| \right| \right\} \stackrel{(3)}{=} \sup_{x\in[0,1]} \{|g_n(x)|\} \stackrel{(1)}{=} \sup_{x\in[0,1]} \{g_n(x)\} \stackrel{(2)}{=} g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \ (n \to \infty)$$

2 **1. Möglichkeit:** Ableiten.

Für $\cos x > 0$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\ln\left(|\cos x|\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\ln\left(\cos x\right)\right] = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Für $\cos x < 0$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\ln\left(|\cos x|\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\ln\left(-\cos x\right)\right] = -\frac{1}{-\cos x} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

2. Möglichkeit: Substitutionsregel 2.18.4

Die Substitutionsregel lautet

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = (F \circ g)(x)\Big|_a^b \tag{4}$$

Dabei sind f, g differenzierbar, $g([a,b]) \subset \mathbb{D}(f)$ und $F' = f$. Nun seien

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) := -\frac{1}{x} \\ g &: [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos x \\ F &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := -\ln|x| \end{aligned}$$

Da $g(x) \neq 0$ auf $[a,b]$ ist, folgt $g > 0$ oder $g < 0$ auf $[a,b]$ aus dem Zwischenwertsatz. Also folgt $g([a,b]) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{D}(f)$. Außerdem gilt

$$F'(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -(\ln x)' = -\frac{1}{x} & x > 0 \\ -(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} & x < 0 \end{array} \right\} = f(x)$$

Nun berechnet man die linke Seite von (4) zu

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_a^b -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\, dx = \int_a^b \tan x\, dx$$

Die rechte Seite von (4) berechnet sich zu

$$F(\cos x)\big|_a^b = -\ln|\cos x|\big|_a^b$$

3. Möglichkeit: Anwendungsorientiert

Mit $t = \cos x$ und $dt = -\sin x\, dx$ folgt

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{-\sin x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

4 Zunächst gilt

$$\begin{aligned} x \in \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [0,1] \ \wedge \ x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ x \notin \gamma_n \ \wedge \ x \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ x \in [0,1] \setminus \gamma_n \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [0,1] \setminus \gamma_n \end{aligned} \tag{5}$$

Daher definiert man

$$\Gamma_n := \bigcap_{k=1}^{n} [0,1] \setminus \gamma_k$$

Skizziert man $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, so erkennt man dass Γ_n aus 2^n Intervallen der Länge

$$\frac{j+1}{3^n} - \frac{j}{3^n} = \frac{1}{3^n}$$

besteht. Die Summe dieser Längen ist demnach

$$2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Definiere nun Treppenfunktionen $\psi : [0,1] \to [0,1]$, $\psi(x) = 0$ und

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in \Gamma_n \\ 0 & : \ x \notin \Gamma_n \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_\Gamma(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \Gamma \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \forall k \in \mathbb{N} \ : \ x \in [0,1] \setminus \gamma_k \ \Rightarrow \ \forall k \leq n \ : \ x \in [0,1] \setminus \gamma_k \\ &\Rightarrow \quad x \in \Gamma_n \ \Rightarrow \ \phi_n(x) = 1 \end{aligned}$$

Für $x \in [0,1]$ folgt daraus

$$0 = \psi(x) \leq \chi_\Gamma(x) \leq \phi_n(x)$$

Damit gilt

$$\left| \int_0^1 \phi_n(x)\, dx - \int_0^1 \psi(x)\, dx \right| = \left| \int_0^1 \phi_n(x)\, dx \right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

JU