

Musterlösung Übung 13 (Analysis I SS2010)

1 a Wenn f stetig differenzierbar ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x_0)$. Dann folgt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \Rightarrow x_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow f(x_0) = 0$$

1 b Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctan x$. Dann gelten

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(0) = 0$$

Also sind i, ii und iii erfüllt.

Behauptung: Für $|x_n| > 2$ divergiert $|x_n|$ aus dem Newton-Verfahren. Zunächst zeigen wir

$$\left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \geq |x_n| \cdot 2 \arctan 2 \quad (1)$$

1. Fall: $x_n \geq 2$.

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (1+x_n^2) \arctan x_n \geq x_n^2 \arctan x_n = |x_n| \cdot |x_n| \cdot \arctan x_n \geq |x_n| \cdot 2 \arctan 2$$

2. Fall: $x_n \leq -2$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= (1+x_n^2) \arctan x_n = -(1+x_n^2) \arctan(-x_n) \\ \Rightarrow \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| &= (1+x_n^2) \arctan |x_n| \geq |x_n|^2 \cdot \arctan |x_n| \geq |x_n| \cdot 2 \arctan 2 \end{aligned}$$

Nun zeigen wir

$$\arctan 2 > 1 \quad (2)$$

Am Einheitskreis und am gleichschenkligen Dreieck sieht man $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan 1 = \frac{\sin 1}{\cos 1} < 2 \Rightarrow 1 < \arctan 2$$

Aus der Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

folgt

$$\left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n| + |x_{n+1}|$$

Daher

$$|x_{n+1}| \geq \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| - |x_n| \stackrel{(1)}{\geq} |x_n| \cdot 2 \arctan 2 - |x_n| = |x_n| (2 \arctan 2 - 1)$$

Aus (2) bekommt man $a := 2 \arctan 2 - 1 > 0$, also

$$|x_{n+1}| > a|x_n| > \dots \geq a^n |x_1| > 2 \cdot a^n \Rightarrow |x_{n+1}| \rightarrow \infty$$

Insbesondere ist gezeigt, dass aus $|x_1| > 2$ folgt: $|x_n| > 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2 Zu zeigen ist

$$c_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \rightarrow \gamma \in (0, 1)$$

Betrachtet man untere und obere Treppenfunktionen zu der Funktion $\frac{1}{x}$ ergibt sich die Ungleichung

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t} dt < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$$

Beginnt man bei $m < n$ statt bei 1 ergibt sich

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} < \int_m^n \frac{1}{t} dt < \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k-1} \quad (3)$$

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung liefert

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (4)$$

Die Folge (c_n) ist streng monoton fallend, denn

$$\ln n - \ln m \stackrel{(4)}{=} \int_m^n \frac{1}{t} dt \stackrel{(3)}{>} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \Leftrightarrow c_m > c_n \quad (5)$$

Nun berechnet man

$$0 \stackrel{(5)}{<} c_m - c_n = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \stackrel{(3)}{<} - \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k-1} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \epsilon$$

für geeignet große $n > m > K$, denn $(\frac{1}{n})$ ist eine Cauchy-Folge. Also ist auch (c_n) eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Aus der strengen Monotonie folgt

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq c_2 < c_1 = 1$$

Jede Treppe der oberen Treppenfunktion enthält ein Dreieck, das oberhalb des Graphen $\frac{1}{x}$ liegt, und als Hypothenuse eine Sekante hat. Sei d_k der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{n} = c_n - \frac{1}{n}$$

Man bekommt

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) \leq c_n - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq c_n \Rightarrow c_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \geq \frac{1}{2}$$