

Musterlösung Übung 2 (MfC II SS2010)

1(a) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen.

$$y' = x^2 y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 \Leftrightarrow \int y^{-2} dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow -y^{-1} = \frac{1}{3} x^3 + C \Leftrightarrow y = -\left(\frac{1}{3} x^3 + C\right)^{-1}$$

1(b) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{y^2 + 1} \Leftrightarrow \int y^2 + 1 dy = \int \cos(x) dx \Leftrightarrow y^3 + 3y - 3 \sin(x) - 3C = 0.$$

Die Substitution $y = u - u^{-1}$ ergibt

$$(u - u^{-1})^3 + 3(u - u^{-1}) - 3 \sin(x) - 3C = 0 \Leftrightarrow u^3 - u^{-3} - 3 \sin(x) - 3C = 0$$

$$\Leftrightarrow (u^3)^2 + u^3(-3 \sin(x) - 3C) - 1 = 0 \Leftrightarrow u^3 = \frac{3 \sin(x) + 3C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2}\right)^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2}\right)^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \sin(x) + 3C}{2}\right)^2 + 1}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

1(c) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen und mit $t = e^x$ ergibt sich

$$yy'(1 + e^x) = e^x \Leftrightarrow y \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^x} \Leftrightarrow \int y dy = \int \frac{t}{1+t} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 = \ln |1 + e^x| + C$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2 \ln |1 + e^x| + 2C}$$

2 Es handelt sich um eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Schreibt man sie als

$$y' = 1 \cdot y + x^3 e^x = f(x)y + g(x),$$

erhält man die homogene Lösung

$$y_h(x) = e^{\int f(x) dx} = e^x$$

und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = y_h(x) \int \frac{g(x)}{y_h(x)} dx = e^x \int \frac{x^3 e^x}{e^x} dx = \frac{1}{4} x^4 e^x.$$

Die gesamt Lösung lautet nun

$$y(x) = y_p(x) + C y_h(x) = \frac{1}{4} x^4 e^x + C e^x = e^x \left(C + \frac{1}{4} x^4\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 Es handelt sich um eine Bernoulli-DGL. Man schreibt

$$y'(x) = 2x(y^2 - y) = 2xy^2 - 2xy$$

und wählt $u := y^{1-2} = y^{-1}$ als Substitution. Dann ist $u' = -y^{-2} y'$ und die DGL transformiert sich zu

$$-y^{-2} y' = -y^{-2} (2xy^2 - 2xy) = -2x + 2xy^{-1} \Rightarrow u' = -2x + 2xu = g(x) + f(x)u$$

Das ist eine lineare DGL erster Ordnung in $u(x)$. Die homogene Lösung lautet

$$u_h(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2},$$

die partikuläre Lösung berechnet sich mit $t = x^2$ zu

$$u_p(x) = u_h(x) \int \frac{g(x)}{u_h(x)} dx = -e^{x^2} \int \frac{2x}{e^{x^2}} dx = -e^{x^2} \int \frac{2x}{e^t} \cdot \frac{dt}{2x} = 1.$$

Damit ergibt sich

$$u(x) = u_p(x) + C u_h(x) = 1 + C e^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

und durch Zurücksostituieren

$$y(x)^{-1} = 1 + C e^{x^2} \Rightarrow y(x) = \left(1 + C e^{x^2}\right)^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Das AWP liefert

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{1 + C} \Rightarrow C = 1$$

also insgesamt

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{x^2}}.$$

4 Es handelt sich um eine Namenlose DGL. Wir schreiben

$$y' - y^2 - 2xy = x^2 \Leftrightarrow y' = (x + y)^2$$

und substituieren $u := x + y$. Damit ergibt sich $u' = y' + 1$ und somit

$$\begin{aligned} u' - 1 = u^2 &\Leftrightarrow u' = u^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2 + 1} = \int dx \Leftrightarrow \arctan u = x + C \\ &\Leftrightarrow u = \tan(x + C) \Leftrightarrow y(x) = -x + \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

JU