Musterlösung Übung 3 (MfC II SS2010)

1(a)

$$\begin{aligned}
F_x &= 3x^2\tan(xy) + (1+\tan^2(xy))yx^3 = 3x^2\tan(xy) + yx^3 + yx^3\tan^2(xy) \\
F_{xx} &= 6x\tan(xy) + 3x^2(1+\tan^2(xy))y + 3x^2y + 3yx^2\tan^2(xy) + yx^3\cdot 2\tan(xy)\cdot(1+\tan^2(xy))y \\
F_y &= x^4(1+\tan^2(xy)) \\
F_{yy} &= x^4\cdot 2\tan(xy)\cdot(1+\tan^2(xy))\cdot y \\
F_{yx} &= (F_y)_x = 4x^3(1+\tan^2(xy)) + x^4\cdot 2\tan(xy)\cdot(1+\tan^2(xy))\cdot y = F_{xy}
\end{aligned}$$

1(b)

$$F_x = 2x,\ F_{xx} = 2,\ F_y = 2y,\ F_{yy} = 2,\ F_{xy} = F_{yx} = 0$$

2 (a)

$$\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} \end{pmatrix} = e^{xy}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

2 (b) Man schreibt $F(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$. Damit ergibt sich

$$\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)^{-2}\cdot(2x) \\ -(x^2+y^2)^{-2}\cdot(2y) \end{pmatrix} = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3 Die Integrabilitätsbedingungen (IB) für das Vektorfeld

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

lauten $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$. Genau dann wenn die IB erfüllt sind, gibt es ein Potential F auf $\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} F = V$.

3(a) $P_y(x,y) = x^2 \neq 3x^2 = Q_x(x,y)$

3(b) $P_y(x,y) = x = Q_x(x,y)$.

Möglichkeit 1: Berechnung des Potentials mittels mehrfacher Integration.Dazu sei

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y) = \frac{1}{2}x^2y - \cos x + C(y).$$

Vergleich von f_y und Q ergibt

$$f_y(x,y) = Q(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}x^2 + C_y(y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \;\Rightarrow\; C_y(y) = \frac{1}{2}y^2 \;\Rightarrow\; C(y) = \frac{1}{6}y^3 + K,\ K\in\mathbb{R}.$$

Insgesamt

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y - \cos x + \frac{1}{6}y^3 + K.$$

Möglichkeit 2: Berechnung des Potentials mit Satz 2.12 der Vorlesung.

$$f(x,y) = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt = \int_0^x \sin t\,dt + \int_0^y \frac{1}{2}(x^2+t^2)\,dt$$

$$= -\cos x + 1 + (\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}x^2t)\Big|_0^y = 1 - \cos x + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2y$$

3(c) $P_y(x,y) = 90xy = Q_x(x,y)$.

Möglichkeit 1: Berechnung des Potentials mittels mehrfacher Integration.Dazu sei

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y) = 15x^3y + xy^{10} + C(y).$$

Vergleich von f_y und Q ergibt

$$f_y(x,y) = Q(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad 15x^3 + 10xy^9 + C_y(y) = 15x^3 + 10xy^9 \;\Rightarrow\; C(y) = K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt

$$f(x,y) = 15x^3y + xy^{10} + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Möglichkeit 2: Berechnung des Potentials mit Satz 2.12 der Vorlesung.

$$f(x,y) = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt = 0 + \int_0^y 15x^3 + 10xt^9\,dt = 15x^3y + xy^{10}$$

4 Gesucht ist ein Potential zu

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2+1} \\ \frac{y}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$P_y(x,y) = \left(x \cdot (x^2+y^2+1)^{-1}\right)_y = -2xy(x^2+y^2+1)^{-2} = Q_x(x,y)$$

sind die IB erfüllt. Mit Satz 2.12 der Vorlesung folgt

$$f(x,y) = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int_0^y \frac{t}{x^2+t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\ln(x^2+t^2+1)\Big|_0^y = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+1).$$

JU