

## Musterlösung Übung 4 (MfC II SS2010)

- 1(a) Die Exaktheitsbedingungen sind erfüllt, denn mit  $f(x, y) = 3x^2 + 2y$  und  $g(x, y) = 2x - 2y$  gilt  $f_y = g_x = 2$ . Stammfunktion berechnen:

$$h(x, y) = \int_0^x 3t^2 dt + \int_0^y 2x - 2t dt = x^3 + 2xy - y^2.$$

DGL lösen:

$$h(x, y) = C \Rightarrow x^3 + 2xy - y^2 = C \Rightarrow y = x \pm \sqrt{x^2 + x^3 - C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 1(b) Die Exaktheitsbedingungen sind erfüllt, denn mit  $f(x, y) = 2xy^3 + \sin x$  und  $g(x, y) = 3(x^2 + 1)y^2$  gilt  $f_y = g_x = 6xy^2$ . Stammfunktion berechnen:

$$h(x, y) = \int_0^x \sin t dt + \int_0^y 3(x^2 + 1)t^2 dt = 1 - \cos x + (x^2 + 1)y^3.$$

DGL lösen:

$$h(x, y) = C \Rightarrow 1 - \cos x + (x^2 + 1)y^3 = C \Rightarrow y = \left( \frac{\cos x - 1 + C}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- 1(c) Die Exaktheitsbedingungen sind nicht erfüllt, denn mit  $f(x, y) = 2x^6 + 3x^3y$  und  $g(x, y) = 2x^3y^3 + y^4$  gilt  $f_y = 3x^3$  und  $g_x = 6x^2y^3$ .

2 Ableiten von  $y(x)$  ergibt

$$y'(x) = cy_1'(x) + dy_2'(x), \quad y''(x) = cy_1(x)'' + dy_2(x)''.$$

Einsetzen in die DGL ergibt dann

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= cy_1(x)'' + dy_2(x)'' + a(cy_1'(x) + dy_2'(x)) + b(cy_1(x) + dy_2(x)) \\ &= c(y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)) + d(y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)) = 0, \end{aligned}$$

denn  $y_1$  und  $y_2$  sind Lösungen der DGL.

- 3(a) Es handelt sich um eine lineare homogene DGL zweiter Ordnung. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \Rightarrow t = 1 \text{ oder } t = -2.$$

Also sind die Basislösungen  $y_1(x) = e^x$  und  $y_2(x) = e^{-2x}$ . Insgesamt daher

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für das Anfangswertproblem differenziert man  $y$ , also

$$y'(x) = c_1e^x - 2c_2e^{-2x},$$

und setzen die Anfangsbedingungen ein:

$$2 = y(0) = c_1 + c_2, \quad -1 = y'(0) = c_1 - 2c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1.$$

Die Lösung der DGL zu den Anfangswertbedingungen lautet demnach

$$y(x) = e^x + e^{-2x}.$$

- 3(b) Es handelt sich um eine lineare homogene DGL zweiter Ordnung. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind:

$$0 = t^2 - 5t = t(t - 5) \Rightarrow t = 0 \text{ oder } t = 5.$$

Also sind die Basislösungen  $y_1(x) = e^0 = 1$  und  $y_2(x) = e^{5x}$ . Insgesamt daher

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1 + c_2e^{5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für das Anfangswertproblem differenziert man  $y$ , also

$$y'(x) = 5c_2 e^{5x},$$

und setzen die Anfangsbedingungen ein:

$$10 = y(0) = c_1 + c_2, \quad 10 = y'(0) = 5c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 8, c_2 = 2.$$

Die Lösung der DGL zu den Anfangswertbedingungen lautet demnach

$$y(x) = 8 + 2e^{5x}.$$

4 Multiplizieren wir die gegebene DGL

$$x^2 + 2x + y^2 + 2yy' = 0 \quad (1)$$

mit  $e^x$ , ergibt sich die DGL

$$e^x(x^2 + 2x + y^2 + 2yy') = 0. \quad (2)$$

Somit ist  $y$  genau dann eine Lösung von (1), wenn  $y$  eine Lösung von (2) ist. Die neue DGL (2) schreiben wir als

$$e^x(x^2 + 2x + y^2) dx + e^x 2y dy = 0.$$

Mit  $f(x, y) = e^x(x^2 + 2x + y^2)$  und  $g(x, y) = e^x 2y$  gilt  $f_y = g_x = 2ye^x$ , also ist die DGL exakt. Berechnung der Stammfunktion:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt = \int_0^x e^t(t^2 + 2t) dt + \int_0^y 2te^x dt \\ &= e^t t^2 \Big|_0^x + e^x t^2 \Big|_0^y = e^x x^2 + e^x y^2 = e^x(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

DGL lösen:

$$h(x, y) = C \Rightarrow C = e^x(x^2 + y^2) \Rightarrow y = \pm \left( \frac{C}{e^x} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

JU