

## Musterlösung Übung 5 (MfC II SS2010)

- 1 (a) Es handelt sich um eine lineare homogene DGL zweiter Ordnung. Das charakteristische Polynom lautet  $P(x) = x^2 + 6x + 5$ . Die Nullstellen sind  $x_1 = -1$  und  $x_2 = -5$ , also ergibt sich nach 3.9. (1) der Vorlesung

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als die Menge der Lösungen. Die Ableitung lautet  $y'(x) = -c_1 e^{-x} - 5c_2 e^{-5x}$ . Aus den Anfangsbedingungen erhält man damit

$$6 = y(0) = c_1 + c_2, \quad -10 = y'(0) = -c_1 - 5c_2 \Rightarrow c_1 = 5, c_2 = 1.$$

Insgesamt folgt

$$y(x) = 5e^{-x} + e^{-5x}.$$

- 1 (b) Es handelt sich um eine lineare homogene DGL zweiter Ordnung. Das charakteristische Polynom lautet  $P(x) = x^2 - 6x + 9$ . Die Nullstellen sind  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 3$ , also ergibt sich nach 3.9. (2) der Vorlesung

$$y(x) = c_1 x e^{3x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als die Menge der Lösungen. Die Ableitung lautet  $y'(x) = e^{3x}(c_1 + 3c_2 + 3c_1 x)$ . Aus den Anfangsbedingungen erhält man damit

$$3 = y(1) = c_1 e^3 + c_2 e^3, \quad 10 = y'(1) = e^3(4c_1 + 3c_2) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{e^3}, c_2 = \frac{2}{e^3}.$$

Insgesamt folgt

$$y(x) = e^{-3} x e^{3x} + 2e^{-3} e^{3x} = e^{3x-3}(x+2).$$

- 1 (c) Es handelt sich um eine lineare homogene DGL zweiter Ordnung. Das charakteristische Polynom lautet  $P(x) = x^2 + 2x + 5$ . Die Nullstellen sind  $x_1 = -1 + 2i$  und  $x_2 = -1 - 2i$ , also ergibt sich nach Satz 3.21

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als die Menge der Lösungen. Die Ableitung lautet  $y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-x}(-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x)$ . Aus den Anfangsbedingungen erhält man damit

$$1 = y(0) = c_1, \quad 1 = y'(0) = -c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1.$$

Insgesamt folgt

$$y(x) = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x).$$

- 2 1. **Möglichkeit:** Für  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$ . nach Definition 3.15. Also

$$0 = e^z \Leftrightarrow 0 = e^a(\cos b + i \sin b) \Leftrightarrow 0 = \cos b + i \sin b \Leftrightarrow \cos b = 0 \wedge \sin b = 0.$$

Da Sinus und Kosinus verschiedene Nullstellen haben, ist die letzte Bedingung nicht erfüllbar. Also gilt  $e^z \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

2. **Möglichkeit:** Für  $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$  zeigen wir zunächst die Funktionalgleichung

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{a_1+ib_1} \cdot e^{a_2+ib_2} = e^{a_1} e^{a_2} (\cos b_1 + i \sin b_1)(\cos b_2 + i \sin b_2) \\ &= e^{a_1+a_2} (\cos b_1 \cos b_2 + \sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2 + i \sin b_1 \sin b_2) \\ &= e^{a_1+a_2} (\cos(b_1+b_2) + i \sin(b_1+b_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Nun folgt  $e^z \cdot e^{-z} = 1$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Daher ist  $e^z \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

3 Es handelt sich um eine lineare homogene DGL zweiter Ordnung. Das charakteristische Polynom lautet  $P(x) = x^2 + \frac{1}{9}$ . Die Nullstellen sind  $x_1 = -\frac{1}{3}i$  und  $x_2 = \frac{1}{3}i$ , also ergibt sich

$$y(x) = c_1 \cos \frac{x}{3} + c_2 \sin \frac{x}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als die Menge der Lösungen. Die Ableitung lautet

$$y'(x) = -\frac{1}{3}c_1 \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{3}c_2 \cos \frac{x}{3}.$$

Aus den Anfangsbedingungen erhält man damit

$$1 = y'(\pi) = -\frac{1}{3}c_1 \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}c_2 \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2, \quad 2 = y'(-\pi) = \frac{1}{6}\sqrt{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{\sqrt{3}}, c_2 = 9.$$

Insgesamt folgt

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{3} + 9 \sin \frac{x}{3}.$$

4 Eigenschaft (b) bedeutet, dass  $f$  eine homogene DGL zweiter Ordnung lösen soll. Das charakteristische Polynom lautet  $P(x) = x^2 - 4x + 4$ . Die Nullstellen sind  $x_1 = x_2 = 2$ , also ergibt sich

$$f(x) = e^{2x}(c_1x + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als Menge der Lösungen. Die Ableitung ist  $f'(x) = e^{2x}(2c_1x + 2c_2 + c_1)$ . Eigenschaft (c) liefert die Anfangsbedingung

$$4 = f'(0) = 2c_2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 4 - 2c_2 \Rightarrow f(x) = e^{2x}(4x - 2c_2x + c_2).$$

Es gilt

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 4x - 2c_2x + c_2 = x(4 - 2c_2) + c_2 \Rightarrow x = -\frac{c_2}{4 - 2c_2}.$$

Also hat  $f$  genau dann keine Nullstelle, wenn  $4 - 2c_2 = 0$  gilt, also für  $c_2 = 2$ . Damit folgt  $f(x) = 2e^{2x}$ .

JU