

Musterlösung Übung 6 (MfC II SS2010)

1 (a)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 (b) Da B die Einheitsmatrix ist, gilt $AB = BA = A$.

2 (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 \\ 7 & 8 & 9 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -4 \\ \\ -7 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & -3 & -6 & | & -16 \\ 0 & -6 & -12 & | & -24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \\ \\ \end{array} \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & -3 & -12 & | & -16 \\ 0 & 0 & 0 & | & 8 \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung der Zeilenstufenform lautet also $0 \cdot z = 8$. Diese ist nicht lösbar, also ist die Lösungsmenge des LGS leer.

2 (b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & | & 1 \\ 2 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 8 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ 3 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & | & -2 \\ 6 & 12 & 0 & | & 6 \\ 0 & 8 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ \end{array} \\ \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & | & -2 \\ 0 & 12 & 4 & | & 4 \\ 0 & 8 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & | & -2 \\ 0 & 24 & 8 & | & 8 \\ 0 & -24 & -9 & | & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ \end{array} \\ \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 & | & -2 \\ 0 & 24 & 8 & | & 8 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Rückwärts auflösen ergibt nun $z = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$.

3 Der Rang der ersten Matrix ist Zwei nach Aufgabe 2(a).

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 2i & 1 & -1 \\ i & i & i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \\ -1 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & i-1 & i-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} i-1 \\ \\ \\ \end{array} \\ \mapsto \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3-4i \end{pmatrix}$$

Der Rang der zweiten Matrix ist also 3.

Der Rang der dritten Matrix ist offenbar Zwei, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -3 \\ \\ -2 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Noch schneller sieht man das, indem man den Rang der transponierten Matrix berechnet. Dann sind nämlich die erste und zweite Zeile gleich.

4 Die Voraussetzung

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$$

liefert

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

also $b = c$ und $a = d$. Damit ergibt die Bedingung

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & 2ac \\ 2ac & a^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man $a^2 + c^2 = 1$ und $2ac = 0$. Also ergibt sich

$$a = 0 \wedge c = \pm 1 \quad \vee \quad c = 0 \wedge a = \pm 1$$

und damit

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

JU