Musterlösung Übung 7 (MfC II SS2010)

1 Wir lösen das System simultan mit Methode 4.17:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|ll|ll|} \downarrow & -1 & \downarrow & -2 \\ \leftarrow & & \downarrow & \\ & & \leftarrow & \\ & & & \end{array} \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|ll|ll|} & & & \\ \downarrow & 1 & \downarrow & 2 \\ \leftarrow & & \downarrow & \\ & & \leftarrow & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|ll|} & \\ & \\ \downarrow & -1 \\ \leftarrow & \end{array} \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

zu a) Wir ermitteln die homogene Lösung:

$$\begin{aligned} & x_4 = s, x_5 = t \;\Rightarrow\; 2x_3 + 2s + 4t = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = -s - 2t \;\Rightarrow\; x_2 = -x_4 = -s \\ \Rightarrow\quad & x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = s + s + 2t - s - t = s + t \\ \Rightarrow\quad & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (s + t, -s, -s - 2t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

zu b) Die Lösungsmenge ist leer, denn die letzte Gleichung lautet $0 \cdot x_5 = 2$.

zu c) Für $x_4 = x_5 = 0$ bekommt man durch rückwärts auflösen eine partikuläre Lösung. Sie lautet $(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0)$. Die Lösung des Systems erhält man nun durch Addieren der homogenen und der partikulären Lösung, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2 Mit der Formel aus Lemma 4.31 berechnet man

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 3 - 4 = -1 \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}\right| = 14 - (-3) = 17 \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\right| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -2i & -2ix \\ i & i \end{pmatrix}\right| = (-2i) \cdot i - (-2i) \cdot i = 0 \;\Rightarrow\; \text{nicht invertierbar}$$

3 a Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ 2×2-Matrizen. Dann gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

und daher

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}).$$

Außerdem berechnet man

$$\det A \cdot \det B = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}).$$

Ausrechnen und vergleichen ergibt die Beahuptung.

3 b Da A und B invertierbar sind, gilt $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$ nach Satz 4.40. Aus Aufgabe 3a) folgt $\det(AB) \neq 0$, also ist auch AB invertierbar. Sei nun $C := (AB)^{-1}$ die Inverse von AB. Man errechnet

$$C(AB) = E \;\Rightarrow\; (CA)B = E \;\Rightarrow\; CA = EB^{-1} \;\Rightarrow\; CA = B^{-1} \;\Rightarrow\; C = B^{-1}A^{-1}$$

4 Die Determinante berechnet sich mit 4.57 der Vorlesung zu

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1-x & 1 \\ x & -x & 1 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{array}{|ll|ll|} & & \leftarrow & \\ \leftarrow & & \uparrow & \\ \uparrow & -1 & \uparrow & -1 \end{array} = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1-2x & 0 \\ x-2 & -2x & 0 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1-2x \\ x-2 & -2x \end{pmatrix}\right|$$

$$= -(1-2x)(x-2)\ .$$

Daher ist die Matrix gemä"s Satz 4.40 <u>nicht</u> invertierbar, wenn

$$-(1-2x)(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \wedge x = 2$$

gilt. Also ist die Matrix für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, \frac{1}{2}\}$ invertierbar. JU