

Musterlösung Übung 8 (MfC II SS2010)

1 Zur Berechnung verwenden wir u.a. Methode 4.57 der Vorlesung.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -(1 - (-2)) = -3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1999 & 0 & 0 \\ 2000 & 1 & 0 \\ 2001 & 2002 & 1 \end{pmatrix} = 1999 \cdot 1 \cdot 1 = 1999$$

2 A Mit 5.3 der Vorlesung berechnet man

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-t & e^x \\ e^x & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - e^{2x} \Rightarrow e^x = |1-t| \Rightarrow t_1 = 1 - e^x, t_2 = 1 + e^x$$

Die Eigenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)^\top$ sind die Lösungen des LGS $\det(A - t_i E) \cdot \vec{v} = 0$.

Zu t_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 - e^x) & e^x \\ e^x & 1 - (1 - e^x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x & e^x \end{pmatrix}$$

Wähle nun $v_2 =: s$ als freie Variable, dann ergibt sich $v_1 = \frac{1}{e^x} \cdot (-se^x) = -s$. Die Eigenvektoren haben also die Gestalt $\vec{v} = s(-1, 1)^\top$, $s \in \mathbb{R}$.

Zu t_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 + e^x) & e^x \\ e^x & 1 - (1 + e^x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -e^x & e^x \end{pmatrix}$$

Wähle nun $v_2 =: s$ als freie Variable, dann ergibt sich $v_1 = -\frac{1}{e^x} \cdot (-se^x) = s$. Die Eigenvektoren haben also die Gestalt $\vec{v} = s(1, 1)^\top$, $s \in \mathbb{R}$.

2 B Mit 5.3 der Vorlesung berechnet man

$$0 = \det \begin{pmatrix} 3-t & 4 \\ 5 & 6-t \end{pmatrix} = (3-t)(6-t) - 20 = t^2 - 9t - 2 \Rightarrow t_1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{89}, t_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{89}$$

Die Eigenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)^\top$ sind die Lösungen des LGS $\det(B - t_i E) \cdot \vec{v} = 0$.

Zu t_1 :

Wegen $\text{rang}(A - t_1 E) < 2$ muss $\text{rang}(A - t_1 E) = 1$ gelten, also bleibt die Gleichung $(3 - t_1)v_1 + 4v_2 = 0$ zu lösen. Man wählt $s := v_2$ und bekommt $v_1 = -s \cdot \frac{4}{3-t_1} = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{89}$. Also haben die Eigenvektoren die Darstellung

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{89} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zu t_2 :

Da sich t_2 von t_1 nur durch ein Minuszeichen vor der Wurzel unterscheidet und B nur rationale Einträge hat, folgt

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{89} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2 C Mit 5.3 der Vorlesung berechnet man

$$0 = \det \begin{pmatrix} t - \cos x & -\sin x \\ \sin x & t - \sin x \end{pmatrix} = (t - \cos x)^2 + \sin^2 x \Rightarrow |t - \cos x| = \sqrt{-\sin^2 x} = i|\sin x|$$

Also $t_1 = \cos x + i|\sin x|$ und $t_2 = \cos x - i|\sin x|$.

1. Fall: $\sin x > 0$

Man erhält $t_1 = \cos x + i \sin x$ und $t_2 = \cos x - i \sin x$.

Die Eigenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)^\top$ sind die Lösungen des LGS $\det(C - t_i E) \cdot \vec{v} = 0$.

Zu t_1 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos x - (\cos x + i \sin x) & -\sin x & \\ \sin x & \cos x - (\cos x + i \sin x) & \end{array} \right) \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} -i \sin x & -\sin x \\ i \sin x & \sin x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i \sin x & \sin x \end{pmatrix}$$

Das ergibt die Gleichung $\sin x(i v_1 + v_2) = 0$. Mit $s := v_1$ bekommt man $v_2 = -i s$ und somit

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Zu t_2 :

Man rechnet genauso und bekommt

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

2. Fall: $\sin x < 0$

Man erhält $t_1 = \cos x - i \sin x$ und $t_2 = \cos x + i \sin x$ und daher dasselbe Ergebnis wie im ersten Fall.

3. Fall: $\sin x = 0$

Daraus folgt $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $\cos x = (-1)^k$ und somit $t_1 = 1$ und $t_2 = -1$. Damit wird die Matrix C jeweils zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen gilt

$$\vec{v} \text{ Eigenvektor} \Leftrightarrow C\vec{v} = t_i \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow v \in \mathbb{R}^2$$

3 A Mit 5.3 der Vorlesung berechnet man

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)((2-t)(3-t)-1) = (1-t)(t^2-5t+5)$$

Also $t_1 = 1, t_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, t_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Die Eigenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$ sind die Lösungen des LGS $\det(A - t_i E) \cdot \vec{v} = 0$.

Zu t_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} -2 \left| \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. -1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt $s = v_1, v_2 = v_3 = 0$, also $\vec{v} = s \cdot (1, 0, 0)^\top, s \in \mathbb{R}$.

Zu t_2 :

$$\begin{pmatrix} 1-t_2 & 2 & 3 \\ 0 & 2-t_2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-t_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left| \leftarrow \right. \\ \left| \leftarrow \right. \\ \left| \uparrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right| \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left| \leftarrow -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right| \\ \left| \leftarrow \right. \\ \left| \leftarrow \right. \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3+\sqrt{5} & -\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Man wählt nun $s := v_3$ und löst nach v_1 und v_2 auf. Dann ergibt sich

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Zu t_3 :

Da sich t_3 von t_2 nur durch ein Minuszeichen vor der Wurzel unterscheidet und A nur rationale Einträge hat, folgt

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

3 B Mit 5.3 der Vorlesung berechnet man

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 1-t & 1 \\ 0 & 4 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)((1-t)(3-t)-4) = (1-t)(t^2-4t-1) \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2+\sqrt{5}, t_3 = 2-\sqrt{5}$$

Die Eigenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ sind die Lösungen des LGS $\det(B - t_i E) \cdot \vec{v} = 0$.

Zu t_1 :

Es ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Man wählt $s := v_3$, damit folgt $v_2 = -\frac{1}{2}s$ und $v_1 = -\frac{1}{2}s$. Also

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Zu t_2 :

$$\begin{pmatrix} 1-(2+\sqrt{5}) & 0 & 0 \\ 2 & 1-(2+\sqrt{5}) & 1 \\ 0 & 4 & 3-(2+\sqrt{5}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 2 & -1-\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 4 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man wählt $s := v_3$ und löst nach v_1 und v_2 auf. Dann ergibt sich

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Zu t_3 :

Da sich t_3 von t_2 nur durch ein Minuszeichen vor der Wurzel unterscheidet und B nur rationale Einträge hat, folgt

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

4 Nach Lemma 4.51 der Vorlesung gilt

$$p_A(x) = \det(xE - A) = \det \begin{pmatrix} x - \alpha & 0 \\ \beta & x - \gamma \end{pmatrix} = (x - \alpha)(x - \gamma)$$

$$p_A(t) = \det(tE - A) = \det \begin{pmatrix} t - \alpha & 0 & 0 \\ x & t - \beta & 0 \\ y & z & t - \gamma \end{pmatrix} = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)$$

JU