Musterlösung Übung 9 (MfC II SS2010)

1 Offenbar gelten nach Definition 5.11.

$$|v_i| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$< v_i, v_j >= 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 15, \quad (i \neq j)$$

also

$$\cos\phi = \frac{< v_i, v_j >}{|v_i| \cdot |v_j|} = \frac{15}{19} \;\Rightarrow\; \phi = 42^\circ$$

$$\mathrm{Vol}\, P(v_1, v_2, v_3) = \det(v_1, v_2, v_3) = 28 \quad \text{(Satz 5.12)}$$

Es gilt

$$|v_1 \times v_2| = |\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}| = \sqrt{136}$$

Da die Längen und Winkel zwischen den Vektoren alle gleich sind gilt

$$\mathrm{Vol}\, P(v_i, v_j) = \sqrt{136}, \quad (i \neq j)$$

2 Mit Lemma 6.3. entscheidet man: V_1 ist kein Unterraum, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$, aber $(-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_1$.

V_2 ist ein Unterraum, denn aus $x^2 + y^2 \leq 0$ folgt $x = y = 0$, also $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

V_3 ist kein Unterraum, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \in V_3$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_3$, aber $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \notin V_3$.

3 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

die Matrix aus den Vektoren v_1, v_2, v_3. Es gilt dann $\det A = -1 \neq 0$, also $\operatorname{rang} A = 3$. Daher ist ein LGS $Ax = b$ für jedes b eindeutig lösbar. Also ist jeder der Vektoren in V.

4 Man berechnet $\det(v_1, v_2, v_3) = -2 \neq 0$. Daher sind die Vektoren linear unabhängig. Da v_4 eine Linearkombination der anderen ist, gilt

$$\det(v_1, v_2, v_4) \neq 0, \; \det(v_1, v_4, v_3) \neq 0, \; \det(v_4, v_2, v_3) \neq 0$$

Also bilden $\{v_i, v_j, v_k\}$ für paarweise verschiedene i, j, k nach Bemerkung 6.7 eine Basis also auch ein Erzeugendensystem (EZS) von $\mathbb{R}^3$. Daraus folgt, dass $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ auch ein EZS von $\mathbb{R}^3$ ist. Da nach Satz 6.6 mindestens drei Vektoren für ein EZS von $\mathbb{R}^3$ benötigt werden, gibt es keine weiteren EZS. JU