

Musterlösung Übung 10 (MfC II SS2010)

- 1 Nach Definition 6.9 ist jeder Vektor $\{v_i\}$ linear unabhängig. Da keiner der vorgelegten Vektoren ein skalares Vielfaches eines anderen ist sind auch die Mengen $\{v_i, v_j\}$ für $i \neq j$ linear unabhängig. Nach Bemerkung 6.15 sind drei Vektoren aus \mathbb{R}^3 linear unabhängig, wenn die Determinante $\neq 0$ ist, also

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ linear unabhängig}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow \{v_1, v_3, v_4\} \text{ linear unabhängig}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\} \text{ linear abhängig}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow \{v_2, v_3, v_4\} \text{ linear unabhängig}$$

Wegen $\text{rang}(v_1|v_2|v_3|v_4) = 3$ ist S nach Bemerkung 6.7 ein EZS von \mathbb{R}^3 und wegen Satz 6.12 (1) linear abhängig.

- 2 Gemäß Definition 6.4. ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein EZS von $L(v_1, v_2, v_3)$. Wegen $\det(v_1|v_2|v_3) = 1 \neq 0$ sind die Vektoren nach Bemerkung 6.12. (1) und 4.57 (ii) linear unabhängig. Also bilden sie nach Definition 6.4. (4) und 6.12. (2) und 4.57 (ii) eine Basis von $L(v_1, v_2, v_3)$.

- 3 Zeilenstufenform für die Koeffizientenmatrix A des LGS mit den Variablen x, y, z, t :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left| \leftarrow \right. \\ \left| \uparrow \right. \\ \left| \uparrow \right. \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left| 2 \right. \\ \left| -3 \right. \\ \left| 2 \right. \end{array} \\ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left| \leftarrow \right. \\ \left| \uparrow \right. \\ \left| \right. \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die freie Variable ist t . Damit bekommt man

$$z = -t \Rightarrow y = t \Rightarrow x = y + z = 0 \Rightarrow \mathbb{L}_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Nach Definition 6.24 ist $\mathbb{L}_A = \ker(A)$ und nach Lemma 6.25 ist $\ker(A)$ ein Unterraum des \mathbb{R}^4 . Offenbar wird \mathbb{L}_A von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Dieser Vektor ist linear unabhängig, also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von \mathbb{L}_A . Die Koeffizientenmatrix B entstehe aus A , indem man eine oder zwei Gleichungen wegläßt. Dann folgt $\text{rang } B < 3$. Satz 6.26 ergibt

$$\dim \mathbb{L}_B = \dim \ker(B) = 4 - \text{rang } B > 4 - 3 = 1$$

Also hat eine Basis für \mathbb{L}_B mindestens zwei Elemente, daher ist $\mathbb{L}_B \neq \mathbb{L}_A$

4 Es seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Vektoren zu den Punkten P_1 bzw. P_2 . In

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$$

sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann liegen v_1 und v_2 aber auf einer Geraden oder $v_1 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist $\lambda_1 = 0$ und somit $\lambda_2 = 0$. Also ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig. Damit ist $\text{rang}(v_1|v_2) = 2$ und aus Bemerkung 6.7 folgt, dass $\{v_1, v_2\}$ eine EZS für \mathbb{R}^2 ist.

JU