Musterlösung Übung 11 (MfC II SS2010)

1

$$p_{A_1}(x) = x^2 - 5x - 2, \quad x_1 = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{33}, x_2 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{33}$$

$$\mathrm{Eig}(A_1, x_1) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33} \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Eig}(A_1, x_2) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{33} \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$p_{A_2}(x) = x^2 + 1, \quad x_1 = i, x_2 = -i$$

$$\mathrm{Eig}(A_2, x_1) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix}, s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathrm{Eig}(A_2, x_2) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}, s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$p_{A_3}(x) = x^2 - x - 1, \quad x_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, x_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\mathrm{Eig}(A_3, x_1) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Eig}(A_3, x_2) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

2 Nach Satz 7.13 ist eine Matrix genau dann diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, wenn die geometrische Vielfachheit (Dimension des Eigenraums) gleich der algebraischen Vielfachheit (Vielfachheit als Nullstelle) ist und alle Eigenwerte reell sind.

Die Eigenwerte von A_1 sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Wegen $\dim \mathrm{Eig}(A_1, x_i) = \mathrm{rang}(A_1 - x_i I) = 1$ folgt

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A_2 sind $x_1 = 7$ und $x_2 = -1$. Wegen $\dim \mathrm{Eig}(A_2, x_i) = \mathrm{rang}(A_2 - x_i I) = 1$ folgt

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

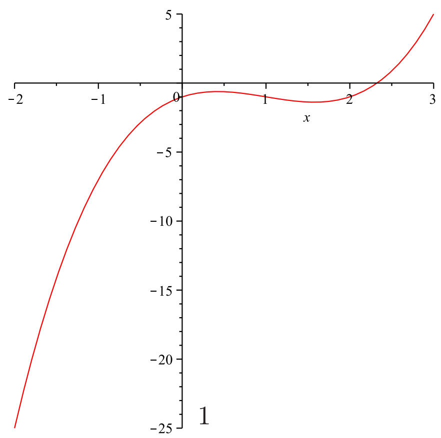
Die Eigenwerte von A_3 sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Wegen $\dim \mathrm{Eig}(A_3, x_i) = \mathrm{rang}(A_3 - x_i I) = 1$ folgt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A_4 sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Wegen $\dim \mathrm{Eig}(A_4, x_i) = \mathrm{rang}(A_4 - x_i I) = 1$ folgt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Das charakteristische Polynom der ersten Matrix lautet $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Der Graph dieser Funktion sieht so aus:



Also gibt es zwei komplexe Nullstellen. Daher ist die Matrix nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

Das charakteristische Polynom der zweiten Matrix ist $(1-x)^3 + (1-x)$, daher sind $1, 1-i$ und $1+i$ die Eigenwerte. Nach Satz 7.13 ist die Matrix nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

Die Eigenwerte der dritten Matrix stehen auf der Hauptdiagonalen. Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, haben die Eigenräume wegen Satz 7.3. die Dimension 1. Also ist die Matrix über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und die Diagonalmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4 Die Eigenwerte x_i der ersten Matrix A stehen auf der Hauptdiagonalen. Da sie paarweise verschieden sind, gilt $\mu(A, x_i) = 1$. Daher sind die Eigenräume und die verallgemeinerten Eigenräume dieselben. Man berechnet

$$\operatorname{Eig}(A,1) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Eig}(A,3) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Eig}(A,6) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

Das charakteristische Polynom der zweiten Matrix B lautet $p_B(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x-2)^2(x-1)^2$. Die Faktorisierung bekommt man durch Raten der Nullstelle 1 und abspalten des Linearfaktors $(x-1)$ mit Polynomdivision oder Horner-Schema. Die Eigenwerte $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ haben also jeweils die algebraische Vielfachheit 2. Der verallgemeinerte Eigenraum ist daher jeweils $\ker(B - x_i \cdot E_3)^2$. Man berechnet

$$(B - 1 \cdot E_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\ker(B - 1 \cdot E_3)^2 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Auf dieselbe Art ergibt sich

$$(B - 2 \cdot E_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\ker(B - 2 \cdot E_3)^2 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

JU