

Musterlösung Übung 12 (MfC II SS2010)

1 Man berechnet

$$p_A(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$$

Da die Summe der Koeffizienten Null ist, ist 1 eine Nullstelle von $p_A(x)$. Mit Polynomdivision oder dem Horner-Schema spaltet man den Linearfaktor $x - 1$ ab und erhält

$$p_A(x) = (x - 1)^2(x - 5)$$

Also gilt $\mu(A, 1) = 2$. Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist $\text{rang}(A - 1 \cdot E_3) = 1$ und somit

$$\dim \text{Eig}(A, 1) = \dim \ker(A - 1 \cdot E_3) = 3 - \text{rang}(A - 1 \cdot E_3) = 2 = \mu(A, 1)$$

Nach Satz 7.3 gilt

$$1 \leq \dim \text{Eig}(A, 5) \leq \mu(A, 5) = 1$$

Also ist A diagonalisierbar und die Diagonalmatrix lautet

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2 Die Matrix A ist nicht symmetrisch, daher ist Definitheit nicht definiert. Die Matrix B hat Eigenwerte -1 und 7 , also ist sie weder positiv noch negativ definit.

Für die Matrix C berechnen wir gemäß Satz 7.30 die Unterdeterminanten C_k . Es gilt

$$\det C_1 = \det -1 = -1 < 0$$

$$\det C_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$\det C_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Daher ist C negativ definit.

Für die Matrix D berechnen wir gemäß Satz 7.30 die Unterdeterminanten D_k . Es gilt

$$\det D_1 = \det 2 = 2 > 0$$

$$\det D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

$$\det D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$$\det D_4 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 > 0$$

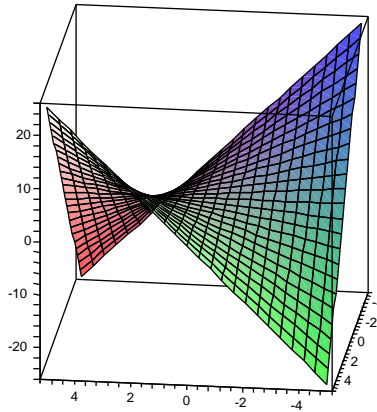
Daher ist D positiv definit.

3 Nach Satz 7.34 findet man die Kandidaten für lokale Extrema, indem man die Nullstellen des Gradienten berechnet. An diesen Stellen muss die Hesse Matrix auf Definitheit geprüft werden.

Für h gilt

$$0 = \text{grad } h(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0, \quad \mathfrak{H}_h(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind 1 und -1 , also ist die Matrix weder positiv noch negativ definit.



Graph der Funktion $h(x, y) = xy$

Für g gilt

$$0 = \text{grad } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x - z \\ 2z - y \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = z = 0, \quad \mathfrak{H}_g(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Kriterium aus Satz 7.30 erkennt man, dass die Hesse Matrix positiv definit ist. Daher hat g bei $(0, 0, 0)$ ein lokales Minimum mit Wert $g(0, 0, 0) = 0$

Für h gilt

$$\text{grad } h(x, y) = \begin{pmatrix} 10 - 14x \\ 12 \end{pmatrix} \neq 0$$

Daher gibt es keine lokalen Extrema.

4 Mit $g(x, y) := -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ schreibt sich die Funktion $f(x, y) = xe^{g(x, y)}$. Es gilt $g_x(x, y) = -x$ und $g_y(x, y) = -y$. Damit berechnet man die partiellen Ableitungen von f wie folgt:

$$\begin{aligned} f_x &= e^g + e^g g_x x = e^g(1 - x^2) \\ f_y &= e^g g_y x = -xye^g \\ f_{xx} &= e^g(x^3 - 3x) \\ f_{yy} &= e^g(-x + xy^2) \\ f_{xy} &= -y(1 - x^2)e^g = f_{yx} \end{aligned}$$

Wegen $e^g > 0$ gilt dann

$$0 = \text{grad } f(x, y) = e^g \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ -xy \end{pmatrix} \Rightarrow x = \pm 1, y = 0$$

Die kritischen Punkte sind demnach

$$P_1 = (1, 0), P_2 = (-1, 0)$$

Die Hesse-Matrix lautet

$$\mathfrak{H}_f(x, y) = e^g \begin{pmatrix} x^3 - 3x & -y(1 - x^2) \\ -y(1 - x^2) & x(y^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Hesse Matrix in P_1 und P_2

$$\mathfrak{H}_f(1, 0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}_f(-1, 0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte stehen jeweils auf der Hauptdiagonalen, daher liegt bei P_1 ein lokales Maximum mit Wert $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$ und bei P_2 ein lokales Minimum mit Wert $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$ vor.

Graph der Funktion $f(x, y) = xe^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}$

JU