ÜBUNGSZETTEL 1 - AUFGABE 1

(a) Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $f^{(k)}(x) = e^x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$T_m[f, x_0] = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{m+1}(x) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_{m+1}(x). \tag{1}$$

Die Lagrangesche Restglieddarstellung liefert

$$R_{m+1}(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} = \frac{e^\xi}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}, \tag{2}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x. Damit gilt

$$\begin{aligned}\left| e^x - e^{x_0} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \right| &= \left| T_m[f, x_0] - e^{x_0} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \right| \overset{(1)}{=} |R_{m+1}(x)| \\ &\overset{(2)}{=} \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} e^\xi \leq \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} e^{\max(x,x_0)},\end{aligned}$$

da $\xi \in [x, x_0]$ bzw. $\xi \in [x_0, x]$ und e^x streng monoton wachsend ist.

(b) Für $m = 1$ gilt $T_1[f, x_0] = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + R_2(x)$. Setzt man $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, dann ist

$$e^{x_1} = e^{x_0} + e^{x_0}(x_1 - x_0) + R_2(x_1) = e^{x_0} + (1-\alpha)(x_1 - x_2)e^{x_0} + R_2(x_1)$$

und analog

$$e^{x_2} = e^{x_0} + e^{x_0}(x_2 - x_0) + R_2(x_2) = e^{x_0} - \alpha(x_1 - x_2)e^{x_0} + R_2(x_1).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\alpha e^{x_1} + (1-\alpha)e^{x_2} &= \alpha e^{x_0} + \alpha(1-\alpha)(x_1 - x_2)e^{x_0} + \alpha R_2(x_1) \\ &\quad + (1-\alpha)e^{x_0} - \alpha(1-\alpha)(x_1 - x_2)e^{x_0} + (1-\alpha)R_2(x_2) \\ &= e^{x_0} + \alpha R_2(x_1) + (1-\alpha)R_2(x_2) \\ &\geq e^{x_0},\end{aligned}$$

weil $R_2(x_i) = \frac{e^\xi}{2}(x_i - x_0)^2 \geq 0$, $i = 1, 2$, und $\alpha \in [0, 1]$.