Aufgabe 9

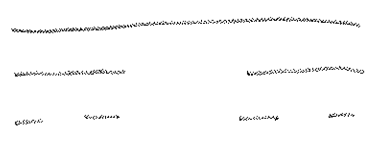
Lösungsskizze

$$B_1 = I_{11} \cup I_{13} = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{3}\right]$$

$$B_2 = I_{21} \cup I_{23} \cup I_{25} \cup I_{27} \cup I_{29}$$

$$= \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}\right] \cup \left[\tfrac{4}{9}, \tfrac{5}{9}\right] \cup \left[\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, \tfrac{9}{9}\right]$$

BILD



1. 3-adische Darstellung: $74 = 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 = (2202)_3$

2. <u>Beh</u> Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt eine eindeutige 3-adische Darstellung $\square$

3. <u>Beh</u>: Sei $M := \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid$ 3-adische Dst. von n enthält nur 2 oder 0 $\}$

Dann $$C_n = \dot{\bigcup_{k \in M \cap \{0, \dots, 3^n - 1\}}} \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$$

Zu $\boxed{3}$

<u>Beh</u> $$C_n = \bigcup_{k \in M \cap \{0,\dots,3^n-1\}} \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right] \qquad (*)$$

<u>Bew</u> Mit Ind. nach $n \in \mathbb{N}_0$. $n=0$: klar. Die IV ist $(*)$. IS: $n \mapsto n+1$:

$$C_{n+1} = B_{n+1} \cap C_n \overset{IV}{=} \bigcup_{\substack{j=0,\dots,3^{n+1}-1 \\ j \text{ even}}} \left[\frac{j}{3^{n+1}}, \frac{j+1}{3^{n+1}}\right] \cap \bigcup_{k \in M \cap \{0,\dots,3^n-1\}} \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$$

$$= \bigcup_{\substack{j=0,\dots,3^{n+1}-1 \\ j \text{ even}}} \ \bigcup_{k \in M \cap \{0,\dots,3^n-1\}} \left[\frac{j}{3^{n+1}}, \frac{j+1}{3^{n+1}}\right] \cap \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$$

$$= \bigcup_{m \in M \cap \{0,\dots,3^{n+1}-1\}} \left[\frac{m}{3^{n+1}}, \frac{m+1}{3^{n+1}}\right].$$

$\boxed{\text{Zu „=“:}}$ „$\supseteq$“ $m \in M \cap \{0,\dots,3^{n+1}-1\}$

$\Rightarrow$ $m = 3k+l$, $l \in \{0,2\}$, $k \in \{0,\dots,3^n-1\}$ $\wedge$ m gerade und 3-adische Dst von k entsteht aus der von m durch Streichen der letzten Ziffer

„c" Seien j, k wie angegeben und $[\dots] \cap [\dots] \neq \emptyset$.

$\overset{j,k}{\underset{\text{grade}}{\Longrightarrow}} \left[\frac{j}{3^{n+1}}, \frac{j+1}{3^{n+1}}\right] \subset \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right] \Longrightarrow j = 3k+l, \ l \in \{0,1,2\}$

$\overset{j,k}{\underset{\text{grade}}{\Longrightarrow}} j = 3k+l, \ l \in \{0,2\} \Longrightarrow j \in M_n \cap \{0, \dots, 3^n - 1\}$ denn 3adische

Dst. von j bekommt man aus der von k durch Anfügen von

0 oder 2

a) Beh: C abgeschlossen. Bew: $I_{n,k}$ abg $\overset{\text{endl.!!}}{\Rightarrow}$ B_n abg $\overset{\bigcap^\infty}{\Rightarrow}$ C abgeschl. $\square$

b) Beh: C_n besteht aus 2^n disjunkten Intervallen der Länge 3^{-n} und C hat ∞-viele Elte.

Bew: Disjunktheit und Länge ist klar. Da $k \in \{0, \dots, 3^n - 1\}$ hat eine 3-adische Dst n Stellen. Jede Stelle $\in \{0, 2\}$ liefert 2^n Möglichkeiten.

$\boxed{\text{A}}$ Sei $x = \frac{m}{3^n}$ linker Endpunkt eines der 2^n Intervalle von C_n. Es gilt $x = \frac{3^k \cdot m}{3^n 3^k}$ und $3^k \cdot m$ entsteht aus $m \in M$ durch Anhängen von k Nullen, also $3^k m \in M \cap \{0, \dots, 3^{n+k} - 1\}$ also $x \in C_{n+k}$ $\forall k \geq 0$, also $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{n+k} = C$. Für jedes C_n sind also alle Endpunkte in C, also hat C mindestens 2^n Elemente. Da n beliebig ist folgt Beh. $\square$

9c) <u>Beh</u> C überabzählbar

<u>Bew</u> $\boxed{1}$ $x \in [0,1] \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (1/3)^k =: (0, x_1 x_2 \dots)$ 3-adische

Entwicklung. $\triangle$: $\frac{1}{3} = (0{,}10\dots)_3 = (0{,}0222\dots)_3 = 0 \cdot x_1 (1/3)^1 + 2(1/3)^2 + \dots$

$= 2 \sum_{k=2}^{\infty} (1/3)^k = 2\left(\underbrace{\frac{1}{1-1/3}}_{3/2} - 1/3 - 1\right) = 2\left(3/2 - 1/3 - 1\right) = 2\left(9/6 - 2/6 - 6/6\right)$

$= 2/6 = 1/3$ ($\rightsquigarrow$ Darstellung nicht eindeutig)

3-adische Entwicklungen

$\boxed{2}$ <u>Beh</u>: $\sum x_k (1/3)^k = \sum y_k (1/3)^k \Leftrightarrow \exists k^* \in \mathbb{N} : (x_k = y_k \; \forall k < k^*)$

$\wedge (x_{k^*} = y_{k^*} + 1) \wedge (x_k = 0, y_k = 2 \; \forall k > k^*)$ $\square$

$\boxed{3}$ <u>Beh</u>: $x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right] \overset{\boxed{2}}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{n} x_k (1/3)^k = \frac{m}{3^n}$ $\square$

Sei $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (\frac{1}{3})^k$ 3-adisch gemäß $\boxed{2}$ und $m \in M \cap \{0, \dots, 3^n - 1\}$, Dann!

$\boxed{4}$ $x \in C_n \overset{\boxed{3}}{\Longleftrightarrow}$ an ersten n-Stellen nur $\{0,2\}$ in 3-adischer Entwicklung

$\boxed{5}$ $x \in C \overset{\boxed{4}}{\Longleftrightarrow}$ in 3-adischer Entw. von x tauchen nur 0 und 2 auf

$\boxed{6}$ $\alpha : C \xrightarrow{\boxed{5}} \{0\text{-}2\text{-Folgen}\} =: X$ ist eine Bijektion

$\boxed{7}$ Bh: X überabzählbar   Bew: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = X$ abzählbar $\Rightarrow$ schreibe

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots$$
$$x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots$$

und def. $y_n := \begin{cases} 2 : & x_{nn} = 0 \\ 0 : & x_{nn} = 2 \end{cases}$. Dann

ist y_n eine 0-2-Folge, die nicht in X ist $\lightning$.

d) Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so dass $3^{-n} < \varepsilon$. Dann enthält C_n wegen b) $\boxed{7}$ kein Intervall der Länge ε. Also auch $C \subset C_n$ nicht.

$\boxed{\text{Aufgabe 10 b}}$ Wegen 9a) ist $C = \overline{C}$. Wegen 9d) ist $\mathring{C} = \emptyset$, also $\partial C = \overline{C} \setminus \mathring{C} = \overline{C}$. Bew: $H(C) = C$. Bew

„$\subset$" $H(C) \subset \overline{C} = C$ „$\supset$" Man weiss (aus 9c): $x \in C \Leftrightarrow$ x hat nur $\{0,2\}$ in 3-adischer Entwicklung, also $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (1/3)^k$ mit $x_k \in \{0,2\}$. Dfn $y_n := \sum_{k=1}^{n} x_k (1/3)^k + (2 - x_{n+1})(1/3)^{(n+1)}$.

Dann $y \in C$ und $y_n \xrightarrow{n \to \infty} x$, also $x \in H(C)$ $\square$