$\boxed{\text{Aufgabe 10}}$ a) Beh $K_r(a) = \mathring{K}_r(a)$ Bew z.z. $K_r(a) = \bigcup_{\substack{U \subset K_r(a) \\ U \text{ offen}}} U$ „⊂"

$x \in K_r(a) \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in \overbrace{K_\delta(x)}^{=:U} \subset K_r(a)$ „⊃" ✓

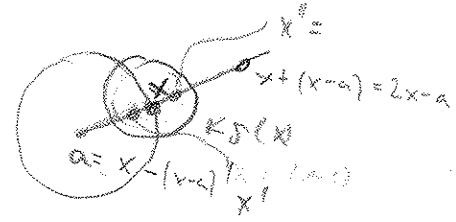
Beh $\partial K_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| = r \} =: M$ Bew $\boxed{1}$ $x \in K_r(a) \Rightarrow \exists \delta > 0 : K_\delta(x) \subsetneq K_r(a)$

$\Rightarrow K_\delta(x) \cap (K_r(a))^c = \emptyset \Rightarrow x \notin \partial K_r(a)$ $\boxed{2}$ $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x-a| > r$ $(x \in K_r(a)^c)$

$\Rightarrow$ für $\delta := \frac{1}{2}|x-a| - r$ gilt $K_\delta(x) \cap K_r(a) = \emptyset$, denn angenommen $\exists x' \in K_\delta(x) \cap K_r(a)$. Dann gilt $|x-x'| + |x'-a| < \delta + r = \frac{1}{2}|x-a| + \frac{1}{2}r < |x-a|$ aber $|x-a| \le |x-x'| + |x'-a|$ nach △ (↯). Also $x \notin \partial K_r(a)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}r < \frac{1}{2}|x-a|$
$\Leftrightarrow r < |x-a|$ ✓

$\boxed{3}$ $x \in M$ und $K_\delta(x)$ für $\delta > 0$ Kugel um x.



(a) Sei $\varepsilon \in (0,1)$ so, dass $(1-\varepsilon) r < \delta$. Dann gilt für

$x' := \varepsilon x + (1-\varepsilon) a$: $|x'-a| = |\varepsilon x - \varepsilon a| = \varepsilon |x-a| < r \Rightarrow x' \in K_r(a)$ und

$|x'-x| = |(\varepsilon-1)x + (1-\varepsilon)a| = (1-\varepsilon)|a-x| < (1-\varepsilon) r < \delta \Rightarrow x' \in K_\delta(x)$

$\Rightarrow K_r(a) \cap K_\delta(x) \neq \emptyset$

(b) Analog mit $x'' := \varepsilon x + (1-\varepsilon)(2x-a)$

□