$\boxed{17}$ $\boxed{1}$ **Beh**: $\|x\|_2 \overset{1)}{\leq} \|x\|_1 \overset{2)}{\leq} \sqrt{n}\,\|x\|_2$ **Bew** Zu 1) Sei $c := \inf\{\|x\|_1 \mid \|x\|_2 = 1\} = \inf\{\sum |x_i| \mid \|x\|_2 = 1\}$. Es ist $c = 1$, denn angenommen es gibt $|x_i| < 1$ für $i = 1, \dots, n$ mit $1 = (\sum |x_i|^2)^{1/2} = \sum \underbrace{|x_i|^2}_{<1} < \sum |x_i| < 1$. Also ist ein $x_i \geq 1$, also wird das Inf. bei $(1,0,\dots,0)$ angenommen.

<u>Gleichheit</u> für $x = (1,0,\dots,0)$.

Zu 2) $\|x\|_1 = \sum |x_i| = \sum |x_i| \cdot |1| \overset{CSU}{\leq} \|x\|_2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \|x\|_2 \cdot \left(\sum^n 1^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 \sqrt{n}$

<u>Gleichheit</u> für $x_0 = (1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})$ denn $\|x_0\|_1 = n \cdot 1/\sqrt{n} = \sqrt{n}$, $\|x_0\|_2 = (\sum (1/\sqrt{n})^2)^{1/2} = 1$

$\boxed{2}$ **Beh** $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \overset{1)}{\leq} \|x\|_\infty \overset{2)}{\leq} \|x\|_2$ **Bew** Sei $x = \sum x_i e_i$. Zu 2)

$\|x\|_\infty = \max_{i=1-n} |x_i| = |x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \delta_{i_0 i} \leq \|x\|_2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \|x\|_2$. <u>Gleichheit</u> für $x_0 = (1,0,\dots,0)$.

Zu 1) $c = \inf\{\max |x_i| \mid (\sum |x_i|^2)^{1/2} = 1\}$. Für $x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$ gilt

$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n \frac{1}{n})^{1/2} = 1$. Es gibt also kein x mit $x_i < 1/\sqrt{n}$ ~~[illegible]~~ $\forall\, i=1,\dots,n$ und $\|x\|_2 = 1$

$\Rightarrow c = 1/\sqrt{n}$ $\boxed{\text{Gleichheit für } x_0 = (1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})}$

$\boxed{3}$ Bh $\|x\|_\infty \overset{1)}{\le} \|x\|_1 \overset{2)}{\le} n\|x\|_\infty$ Bew.: Zu 1) $\|x\|_\infty = \max|x_i|$

$= |x_{i_0}| \le |x_1| + \dots + |x_{i_0}| + \dots + |x_n| = \|x\|_1$. Gleichheit für: $x = (0,1,0 \dots 0)$

Zu 2) $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + \underbrace{|x_{i_0}|}_{=\max|x_i|} + \dots + |x_n| \le n \cdot \max|x_i| = n \cdot \|x\|_\infty$

Gleichheit für: $x = (1, \dots, 1)$