Aufgabe 24 Man berechnet $\alpha = \|\varphi_{p\alpha}(x)-p\| \|x-p\| = \|\lambda(x-p)\| \|x-p\|$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\|x-p\|^2} = |\lambda| = \lambda \Rightarrow \varphi_{p\alpha}(x) = p + \alpha \frac{(x-p)}{\|x-p\|^2}$$

a) $p=0$, $\alpha = 1$

b) Wir zeigen: $x_n \to x \Rightarrow \varphi_{p\alpha}(x_n) \to \varphi_{p\alpha}(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{p\alpha}(x_n) \overset{\boxed{\lim_{n\to\infty}}}{=} p + \frac{x_n - p}{\|x_n - p\|^2} \overset{\|\cdot\| \text{ stetig}}{=} p + \frac{x-p}{\|x-p\|^2}$$

c) <u>Beh</u>: $\varphi_{p\alpha}^{-1} = \varphi_{p\alpha}$ <u>Bew</u>: $\varphi_{p\alpha}(\varphi_{p\alpha}(x)) = p + \alpha \frac{\varphi_{p\alpha}(x)-p}{\|\varphi_{p\alpha}(x)-p\|^2}$

$$= p + \alpha \cdot \frac{\varphi_{p\alpha}(x)-p}{\frac{\alpha^2}{\|x-p\|^2}} = p + \|x-p\|^2 \cdot \frac{1}{\alpha}(\varphi_{p\alpha}(x) - p)$$

$$= p + \|x-p\|^2 \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\alpha \frac{(x-p)}{\|x-p\|^2}\right) = p + x - p = x \quad \square$$

Daher ist $\varphi_{\alpha p}$ bijektiv und $\varphi_{\alpha p}^{-1}$ ist stetig. Also ist $\varphi_{p\alpha}$ Homöom.