$\boxed{\text{Aufgabe 32}}$ Beh: (X,d) kompakt $\Leftrightarrow$ $\Big((A_i)_{i\in I}$ abg. : $\forall \bigcap_{\text{endl.}} A_i \neq \emptyset$ $\Rightarrow \bigcap_I A_i \neq \emptyset \Big)$

Bew: „$\Rightarrow$" Annahme: $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$ und $\forall \{i_1,\dots,i_n\}: \bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \emptyset$. Es ist $\bigcup_{i\in I} A_i^c$ eine offene Überdeckung von X und daher gibt es wegen der Kompaktheit eine endliche TÜ $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}^c$. Daraus folgt $\emptyset = X^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_{i_k}$ ↯.

„$\Leftarrow$" Angenommen: (X,d) ist nicht kompakt. Wir zeigen, dass es eine Familie abgeschlossener Mengen $(A_i)_{i\in I}$ gibt mit $\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \emptyset$ und $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene ÜB von X, die keine offene TÜ hat. Somit gilt für alle endlichen Vereinigungen $\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \neq X$, also $\left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}^c \neq \emptyset$. Aber es gilt $\emptyset = X^c = \bigcup_{i\in I} U_i^c = \bigcap_{i\in I} A_i$ $\square$