$\boxed{\text{Aufgabe 46}}$

$\boxed{1}$ Beh f stetig in $(0,0)$ Bew: Mit Polarkoordinaten

$x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$ folgt: $f(x,y) = \dfrac{r^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{r^2\sin^2 + r^2\cos^2}} = r \sin\varphi \cos\varphi \xrightarrow{r \to 0} 0 \overset{!}{=}$

$= f(0,0)$

$\boxed{2}$ Beh $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$ Bew: $\partial_x f(0,0) =$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f\left(\binom{0}{0} + t\binom{1}{0}\right) - f\binom{0}{0}\right) = \lim\limits_{t \to 0} f(t,0) - \overset{!}{=} 0$ Analog $\partial_y f(0,0)$ $\square$

$\boxed{3}$ Beh ∂_x nicht stetig in $(0,0)$ Bew Wir brauchen das $\partial_x f(x,y)$

für $(x,y) \neq (0,0)$: $f_x(x,y) = \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x = y \cdot \dfrac{1}{\sqrt{}} + xy \cdot \left((x^2+y^2)^{-1/2} \right)_x$

$= \dfrac{y}{\sqrt{}} + xy \cdot -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2x = \dfrac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Daher gilt: $(0,y) \to (0,0) \Rightarrow \partial_x(0,y) = y^3 / y^3 = 1 \not\to 0 \overset{\boxed{2}}{=} \partial_x f(0,0)$

$\boxed{4}$ Nach Satz 4.26. ist f wg $\boxed{3}$ nicht tot. db.

5 a. $\partial_v f(0,0) = \lim_{t \to 0\pm} \frac{1}{t}\left(f\left(\binom{0}{0} + t\binom{v_1}{v_2}\right) - f(0,0)\right) = \lim_{t \to 0\pm} \frac{1}{t}\left(f(tv_1, tv_2)\right)$

$= \lim_{t \to 0\pm} \frac{1}{t} \frac{t^2 v_1 v_2}{\sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t \to 0\pm} \frac{\cancel{t} v_1 v_2}{|t| \sqrt{v_2^2 + v_2^2}} = \begin{cases} \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1 v_2}} & : t \to 0+ \\ -\frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1 v_2}} & : t \to 0- \end{cases}$

Sei $V = (v_1, v_2)$ mit $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$.

b Sei $v = (v_1, 0) = v_1(1,0)$. Dann $\partial_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, 0)}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{0}{\sqrt{(tv_1)^2}} = 0$