$\boxed{\text{Aufgabe 55}}$ $\boxed{1}$ **Beh**: $h(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$

Bew Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ ist die Beh. klar. Aus Symmetriegründen reicht es zu zeigen, dass h in 1 C^∞ ist. Wir zeigen also dass $h_1(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x = 1 \end{cases}$ C^∞ ist. Sei dazu $-y^2 := x^2 - 1$, also $0 < x < 1 \iff 0 < x^2 < 1 \iff 0 < 1 - y^2 < 1 \iff -1 < -y^2 < 0 \iff 1 > y^2 > 0 \iff 1 > y > 0$ und $x = 1 \iff y = 0$ daher betrachte $h_2(y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{y^2}\right) & : 0 < y < 1 \\ 0 & : y = 0 \end{cases}$

Wir zeigen dass h_2 C^∞ in 0 ist. Es gilt $h_2^{(k)}(y)$

$= P_k\left(\frac{1}{y}\right) e^{-1/y^2}$ für ~~…~~ Polynome $P_k \in \mathbb{R}[y]$, denn: $k = 0$ ✓

$k \mapsto k+1$: $h_2^{(k+1)}(y) = \left(P_k(1/y)\, e^{-1/y^2}\right)' = P_k'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) e^{-1/y^2}$

$+ e^{-1/y^2} \cdot \frac{2}{y^3} P_k(1/y)$ $\square$ Nun ist $\lim\limits_{y \downarrow 0} h_2(y) = \lim\limits_{y \to 0}$

$P_k\left(\frac{1}{y}\right) \underbrace{e^{-1/y^2}}_{\to 0 \text{ exp-schnell}} = 0$ also $h_2 \in C^\infty([0,1))$.

$\boxed{2}$ Sei $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x \longmapsto \|x\|$. Dann gilt nach (4.30)

$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = h'(n(x)) \cdot \frac{x_j}{\|x\|}$. Außerdem gilt $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\|x\|^e} = \frac{\partial}{\partial x_k} \|x\|^{-e}$

$= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{\sum x_i^2}\right)^{-e} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum x_i^2\right)^{-e/2} = -\frac{e}{2} \left(\sum x_i^2\right)^{-e/2 - 1} \cdot 2x_k = -\frac{e}{2} \left(\sum x_i^2\right)^{-\frac{e+2}{2}}$

$$= -\frac{\ell}{2} \cdot \|x\|^{-(\ell+2)} \cdot 2x_k = -\ell x_k \cdot \frac{1}{\|x\|^{-\ell-2}}$$

. Mit der Produktregel kann man also f beliebig oft partiell ableiten $\square$