12.2 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Definition 12.8: (Definitheit): Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.

a) A heißt **positiv definit** , falls alle Eigenwerte positiv (> 0) sind.

b) A heißt **positiv semidefinit** , falls alle Eigenwerte ≥ 0 sind.

c) A heißt **negativ definit** , falls alle Eigenwerte negativ (< 0) sind.

d) A heißt **negativ semidefinit** , falls alle Eigenwerte ≤ 0 sind.

e) A heißt **indefinit** , falls es sowohl positive, als auch negative Eigenwerte gibt.

Satz 12.9: (Hurwitz-Kriterium) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und es bezeichne

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

die sogenannte k–te Unterdeterminante von A. Dann gilt:

a) $D_k > 0,\ k = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist positiv definit.

b) $(-1)^k D_k > 0,\ k = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist negativ definit.

c) Ist $\det(A) \neq 0$ und gilt weder a) noch b), so ist A indefinit.

Satz 12.10: (hinreichendes Kriterium) Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{x}_0 \in \Omega$ Kandidat für eine Extremstelle (d.h. $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$). Ferner bezeichne $Hf(\vec{x}_0)$ die (~~immer symmetrische~~) Hesse-Matrix von f im Punkt $\vec{x}_0$. Dann gilt:

a) $Hf(\vec{x}_0)$ ist positiv definit $\quad \Rightarrow \quad f$ besitzt in $\vec{x}_0$ ein echtes lokales Minimum.

b) $Hf(\vec{x}_0)$ ist negativ definit $\quad \Rightarrow \quad f$ besitzt in $\vec{x}_0$ ein echtes lokales Maximum.

c) $Hf(\vec{x}_0)$ ist indefinit $\quad \Rightarrow \quad f$ besitzt in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

d) Ist $Hf(\vec{x}_0)$ die Nullmatrix und eine dritte partielle Ableitung an der Stelle $\vec{x}_0$ von Null verschieden, so besitzt f in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

e) $Hf(\vec{x}_0)$ ist positiv semidefinit $\quad \Rightarrow \quad f$ besitzt in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum <u>oder</u> einen Sattelpunkt.

f) $Hf(\vec{x}_0)$ ist negativ semidefinit $\quad \Rightarrow \quad f$ besitzt in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum <u>oder</u> einen Sattelpunkt.