Aufgabe 65 $\boxed{1}$ <u>Dfn</u> $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_1 \neq x_2 \in I$, $\lambda \in (0,1)$

$f: I \to \mathbb{R}$ <u>konvex</u> $\Longleftrightarrow \forall \lambda \in (0,1): f(x_1 \lambda + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\boxed{2}$ <u>Beh</u> f konvex $\Longleftrightarrow \forall x_1 < x < x_2 : f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$

<u>Bew</u> Die erste Äq folgt aus $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

$\Longleftrightarrow x = x_2 - \lambda x_2 - \lambda x_1 \Longleftrightarrow x_2 - x = \lambda x_2 - \lambda x_1 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$

Genauso $(1-\lambda) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Die zweite geht so:

linke Seite $\Longleftrightarrow \underbrace{(x_2 - x_1)}_{= (x_2 - x) + (x - x_1)} f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$

$\Longleftrightarrow \quad (x_2 - x)\left[f(x) - f(x_1)\right] \leq (x - x_1)\left[f(x_2) - f(x)\right]$

$\Longleftrightarrow$ rechte Seite. $\boxed{3}$ **Beh** f konvex $\Longrightarrow \forall\, x_1 < x < x_2$

$$: \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{\boxed{a}}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \underset{\boxed{b}}{\leq} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

Bew $\boxed{a} \Longleftrightarrow (x_2 - x_1)\left[f(x) - f(x_1)\right] \leq (x - x_1)\left[f(x_2) - f(x_1)\right]$

$\Longleftrightarrow \quad (x_2 - x_1) f(x) \leq f(x_1)\left[x_2 - x_1 - x + x_1\right] + f(x_2)(x - x_1)$

$\Longleftrightarrow \quad f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$. Jetzt $\boxed{2}$.

Genauso bekommt man $\boxed{b}$.

$\boxed{4}$ **Beh** $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathring{I})$, f konvex in I

$\Longleftrightarrow \quad f' : \mathring{I} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend

<u>Bew</u>: „$\Longrightarrow$" Seien $x_1 < x < x_2$ alle aus $\mathring{I}$. Mit $\boxed{3}$:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab!}} \leq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$= f'(x_2)$$

„$\Longleftarrow$" Seien $x_1 < x < x_2 \in \mathring{I}$. Der MWS liefert

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2 \text{ mit } \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)$$

$$\overset{f' \nearrow}{\leq} f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$ Mit $\boxed{2}$ folgt f konvex

$\boxed{5}$ <u>Beh</u> f wie in $\boxed{4}$, $f \in C^2(\mathring{I})$ konvex $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$

<u>Bew</u> f konvex $\underset{\boxed{4}}{\Longleftrightarrow}$ $f' \nearrow$ $\overset{\text{Ana 1}}{\Longleftrightarrow}$ $f'' \geq 0$ $\square$