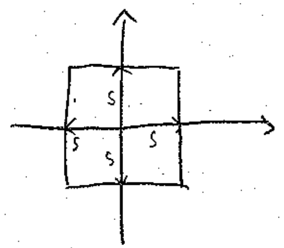
$\boxed{66b}$ **Beh:** $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex $\Rightarrow$ f stetig

$\boxed{\text{Es reicht Stetigkeit in } \underline{0} \text{ zu zeigen}}$

Bew: OBdA sei $0 \in U$ und $f(0) = 0$. Da U offen ist gibt es einen n-dimensionalen Würfel W der Kantenlänge $2s$ mit Mittelpunkt $\underline{0}$ und $W \subset U$.



Es seien $V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_N\} \subset \mathbb{R}^n$ die Ecken des Würfels und $K(V) = \{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \underline{v}_i \mid \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \}$ die <u>konvexe Hülle</u> von V. Sei $c := \max f|_V$. Für jedes $x \in K(V)$ gilt dann $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \underline{v}_i\right) \overset{f \text{ konvex}}{\leq} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(\underline{v}_i) \leq c \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = c$, also $f|_{K(V)} \leq c$. Wegen $B_{\underline{0}}(s) \subset K(V)$ ist also $f(x) \leq c$ für jedes $x \in K(V)$ mit $|x| = s$.

Dfn $\varphi_x : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(t) = \varphi_x(t) := f(tx)$ für $\boxed{\text{so}}$ ein $|x| = s$.

Dann ist φ_x konvex, denn: $\varphi_x(\lambda t_0 + (1-\lambda) t_1) = f(\lambda t_0 x + (1-\lambda) t_1 x)$

$\leq \lambda f(t_0 x) + (1-\lambda) f(t_1 x) = \lambda \varphi_x(t_0) + (1-\lambda) \varphi_x(t_1)$. Für $t \in (0,1)$ gelten: $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $0 < t < 1$: $\dfrac{\varphi_x(t) - \varphi_x(0)}{t-0} \leq \dfrac{\varphi_x(t) - \varphi_x(1)}{t-1} \Rightarrow (t-1)(\varphi_x(t) - 0) \geq t\varphi_x(t) - t\varphi_x(1)$

$\Rightarrow t\varphi_x(t) - \varphi_x(t) \geq t\varphi_x(t) - t f(x) \Rightarrow \varphi_x(t) \leq t f(x) \leq tc$

$\boxed{2}$ $-1 < t < 0$: $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(-1)}{t+1} \leq \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t-0} \Rightarrow t\varphi(t) - t\varphi(-1) \leq t\varphi(t) + \varphi(t)$

$\Rightarrow \varphi(t) \geq -t f(-x) \overset{|-x|=s}{\geq} -tc$. Aus $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ erhält

man $\boxed{3}$ $|\varphi(t)| \leq tc$ für alle $t \in [0,1]$ und [illegible]

$\varphi(1) = f(x) \leq 1 \cdot c$ und $\varphi(-1) = f(-x) =$

$\boxed{2}$ $-t < 0 < 1$: $\frac{\varphi_{\underline{x}}(0) - \varphi_{\underline{x}}(-t)}{0+t} \leq \frac{\varphi_{\underline{x}}(1) - \varphi_{\underline{x}}(0)}{1-0} \overset{t>0}{\Longrightarrow} -\varphi_{\underline{x}}(-t) \leq t f(\underline{x})$

$\underset{|\underline{x}|=s}{\leq} tc \Rightarrow \varphi_{\underline{x}}(-t) \geq -tc$

Wegen $f(-\underline{x}) \overset{|-\underline{x}|=s}{\leq} c$ für $|\underline{x}| = s$ kann man $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$

auch für $\varphi_{-\underline{x}}$ zeigen, so dass man insgesamt hat:

$\forall\, t \in [0,1)$, $|\underline{x}| = s$ gilt: $\varphi_{\underline{x}}(t) \leq tc$, $\varphi_{\underline{x}}(-t) \geq -tc$,

$\varphi_{-\underline{x}}(t) \leq tc$, $\varphi_{-\underline{x}}(-t) \geq -tc$. Insbesondere also $\forall\, t \in (0,1)$

und $|\underline{x}| = s$: $\varphi_{\underline{x}}(t) \leq tc$ und $\varphi_{\underline{x}}(t) = f(t\underline{x}) = f((-t)(-\underline{x}))$

$= \varphi_{-\underline{x}}(-t) \geq -tc$, also $\boxed{3}$ $|\varphi_{\underline{x}}(t)| \leq tc$ f. alle $t \in [0,1]$, $|\underline{x}| = s$.

Nun folgt für jedes $x \in U$ mit $0 < |x| \leq s$:

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{|x|}{s} \cdot \frac{sx}{|x|} \right) \right| \stackrel{\boxed{2}}{=} \left| \ell\left(\frac{|x|}{s} \cdot \frac{sx}{|x|} \right) \right| \stackrel{\boxed{3}}{\leq} |x| \cdot \frac{c}{s}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 < \frac{|x|}{s} \leq 1 \\ \left\| \frac{sx}{|x|} \right\| = s \end{array}}$$

Also ist f stetig in 0. $\square$