

$P = \infty$: Sei $(x_n) = (t_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ CF in \mathbb{R}^{∞} .

□ $(t_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF: $|t_n^{(1)} - t_m^{(1)}| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |t_n^{(1)} - t_m^{(1)}| = \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$
 $\forall n, m \geq N$.

□ $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{(1)} = t_m \in \mathbb{R}$, $x_n = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$

□ Bsp $\|x_n - x\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad x \in \mathbb{R}^{\infty}$ Bew: Sei $\varepsilon > 0$ ~~gegeben~~ $\exists N \in \mathbb{N}$
 so dass $\|x_n - x\|_{\infty} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Sei $m \in \mathbb{N}$. $\exists \varepsilon_{m,0} > 0$
 gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|t_{n_0}^{(1)} - t_m| < \varepsilon_{m,0}$. Sei $n_0 \geq N$. Dann
 $\forall n \geq N$: $|t_n^{(1)} - t_m| \leq |t_{n_0}^{(1)} - t_m| + |t_n^{(1)} - t_{n_0}^{(1)}| < \varepsilon + \varepsilon_{m,0}$

□ $\varepsilon > 0$ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq N$

also $\sup_{n \in \mathbb{N}} |t_n^{(1)} - t_m| \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$. Wegen $|t_m| = \|t_m\| = \|t_m^{(1)} + (t_{n_0}^{(1)})_{n > n_0}\|$

□ $\leq |t_m - t_m^{(1)}| + |t_m^{(1)}| \leq 2\varepsilon + \|x_{n_0}\|$ ist $x \in \mathbb{R}^{\infty}$ und damit $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ □